ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2012 Математика. Механика. Информатика Вып. 2(10)

УДК 51(092)

Влияние геометрической алгебры Древней Греции на развитие математики

А. Е. Малых, В. И. Данилова
Пермский государственный педагогический университет
Россия, 614990, Пермь, ул. Сибирская, 24
malych@pspu.ru; (342) 280-37-55

Рассмотрено становление геометрической алгебры в Древней Греции. Показано ее применение при решении уравнений, доказательстве алгебраических тождеств, теорем; построении фигур кратных площадей прямолинейных фигур. Описано влияние геометрической алгебры на разрешение математических проблем в арабских странах, Китае и Индии.

Ключевые слова: *геометрическая алгебра; операции с отрезками; приложение площадей; площади геометрических фигур; дополнение; разрезание; преобразование; сравнение; алгебраические уравнения.*

Введение

Зародившись в глубокой древности из практических и хозяйственных нужд, геометрия была востребована египтянами для восстановления границ земельных участков после регулярных разливов реки Нил, при сооружении оросительных каналов, культовых сооружений, пирамид и т.д. Она развивалась в связи с проведением религиозных обрядов. Священные книги древней и средневековой Индии, Китая содержат сведения о геометрических фигурах и их свойствах, в частности, свойствах правильных многоугольниках. Они повсеместно использовались при построении фундаментов храмов, алтарей, жертвенников, имевших кратные площади и объемы. В связи с этим приобрело актуальность нахождение площадей фигур.

1. Первые научные школы

Истоки теоретической геометрии относят к естественнонаучным и философским школам Древней Греции. Ведущее место среди них занимала пифагорейская (VI–V вв. до н.э.). Именно в ней происходило накопление абстрактных математических фактов, соединение их в отдельные системы и создание теоретических основ. В этот же период осуществлялась систематизация геометрических сведений, вводились и совершенствовались приемы доказательства теорем.

Одной из причин создания математических теорий явилось открытие иррациональностей. Первая из них – $\sqrt{2}$ – появилась в геометрии при попытке нахождения общей меры диагонали единичного квадрата и его стороны. Этот факт был логически строго доказан пифагорейцами с использование разработанного метода "приведения к нелепости". Они получили и другие иррациональности, осуществили их первые классификации [1].

Появление иррациональностей в зарождавшейся греческой математике привело к возникновению трудностей как в теоретико-числовом, так и в геометрическом плане: была поставлена под удар метрическая часть геометрии, теория подобия. Пифагорейцы стали искать выход из создавшейся ситуации. Так как оказалось, что множество геометрических величин (отрезков) было более "полным" по сравнению с системой рациональных чисел, в школе стали строить новую теорию на основе геометрических объектов. Она получила название *геометрической алгебры*.

Основными (неопределяемыми) понятиями ее являлись отрезки, с которыми могли быть осуществлены четыре арифметические операции: сложение, вычитание, умножение и деление. Деление интерпретировалось как эквивалентная задача *приложения площадей*. В геометрическую алгебру входили и геометрические предложения, касающиеся алгебраических тождеств, таких как $(a\,{}^{238}_{93}b)^2 = a^2\,{}^{238}_{93}2ab + b^2$; $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ [2].

Метод приложения площадей был применим при решении задач, сводившихся к решению линейных и квадратных уравнений; определению длины сторон правильных вписанных и описанных многоугольников через диаметры вписанной и описанной окружностей, "золотого сечения" отрезка, выражению длины ребер правильных многогранников через диаметр описанной сферы и др. Задачи такого рода решались с помощью канонического метода, который в зависимости от вида квадратного уравнения имел три разновидности: параболический, эллиптический и гиперболический. Очевидно, что в процессе применения этого метода находился лишь один (положительный) корень соответствующего ему квадратного уравнения. Поэтому греки формулировали условия геометрических задач таким образом, чтобы они имели положительное решение. Для этого в их условие (если требовалось) вводились ограничения (диоризмы) [3].

2. Методы геометрической алгебры

Исторически сложилось так, что к решению задач, связанных с нахождением площади прямолинейных геометрических фигур, наметились два подхода. Один был основан на понятиях равновеликости и равносоставленности, другой вначале представлял собой последовательность правил для решения задач, а впоследствии оформился как аналитический.

Первый широко применялся уже в Древней Греции. Он назывался методом *разложения* (разбиения). Суть его заключалась в следующем: для вычисления площади искомой фигуры пытались разбить ее на конечное число частей, так чтобы из них можно было составить другую, более простую, площадь которой могла быть найдена. Там же появились и первые "головоломки". К ним, в частности, относилась игра "стомахион", изобретенная великим Архимедом (280 – 212 гг. до н.э.), в переводе с греческого означавшая "то, что вызывает злость". Название, по-видимому, указывало на трудность, необходимость терпения при составлении любой заданной фигуры. Прямоугольник, длины сторон которого относились как 1:2, разрезали на 14 частей (рис. 1), из которых составлялись различные фигуры (рис. 2, *а*, *б*).

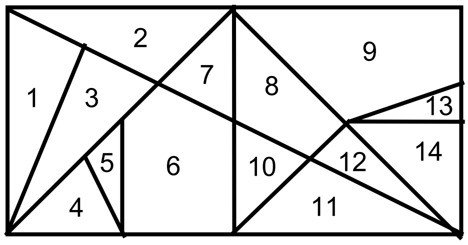
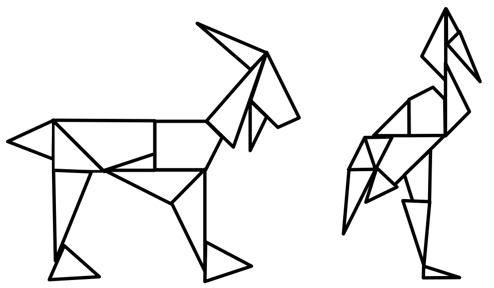


Рис. 1



а *б*

Рис. 2

Широкое распространение, особенно на родине своего создателя – китайского ученого Та-нга, получила увлекательная головоломка "танграм". Несколько тысяч лет назад он предложил разрезать квадрат на части (рис.3).

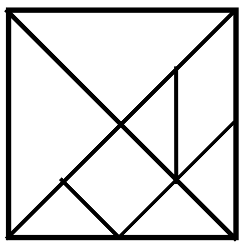
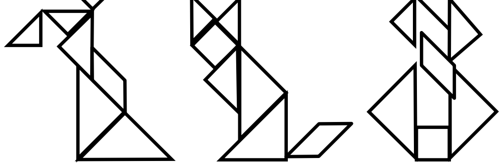


Рис. 3

Из всех семи частей квадрата можно составить самые разнообразные фигуры–силуэты (рис. 4, *а*–*в*). Популярность игры привела к появлению специальных состязаний на составление наибольшего количества фигур с наименьшими затратами времени.



а *б* *в*

Рис. 4

Победители, как и при древней игре в шахматы, награждались, получали известность.

Используя метод разбиения, искомую фигуру приводили в конечном счете к равновеликому ей квадрату, площадь которого сравнивали с квадратом – эталоном. На рис. 5 и 6 показаны две равносоставленные фигуры – крест и квадрат.

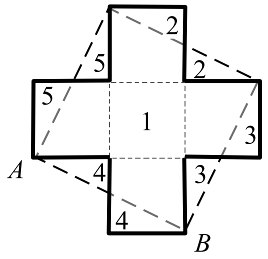


Рис. 5

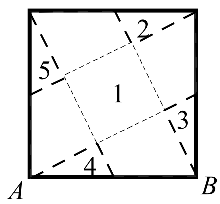


Рис. 6

Тогда же в пифагорейской гетерии были доказаны, в частности, теоремы о равновеликости геометрических фигур: параллелограмма (ромба) и прямоугольника, треугольника и параллелограмма, трапеции и треугольника и др. Заметим, что эти теоремы доказываются аналогичным образом и в современном школьном курсе геометрии. Равновеликость трапеции *ABCD* и треугольника *ABE* показана на рис. 7.

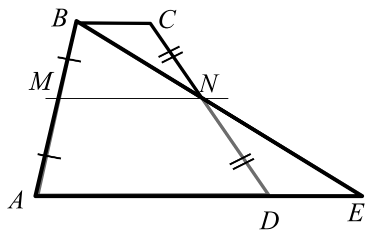


Рис. 7

С методом разбиения в Древней Греции был тесно связан другой способ вычисления площади – *метод дополнения*. Он заключался в том, что вместо разрезания фигур на равные части, дополняли рассматриваемые фигуры так, чтобы получившиеся после дополнения фигуры были равны.

Вернемся к рис. 5 и 6. Крест и квадрат имеют одинаковую площадь, так как они равносоставлены. Теперь дополним каждый из них четырьмя равными треугольниками (рис. 8, 9). В результате получится *одна и та же* фигура. Следовательно, крест и квадрат равновелики.

Метод дополнения был успешно применен для доказательства многих теорем элементарной геометрии. К их числу относилась прежде всего теорема Пифагора. Наиболее раннее ее доказательство было выполнено для равнобедренного прямоугольного треугольника (рис. 10). Под рисунком, как обычно, вместо доказательства помещалась лаконичная надпись: "Смотри"!

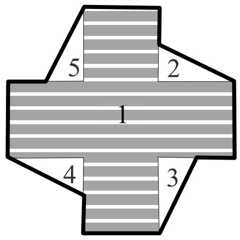


Рис. 8

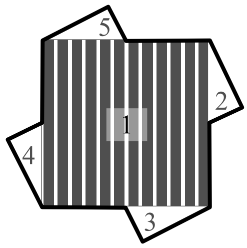


Рис. 9

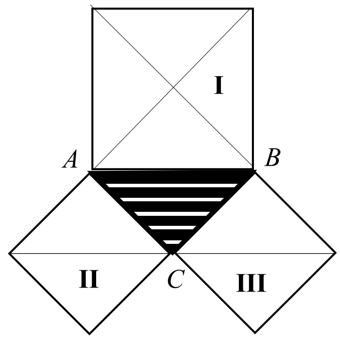


Рис. 10

Для общего вида прямоугольного треугольника была доказана теорема в пифагорейской школе, также с использованием метода дополнения.

Пусть *ABC* – такой треугольник (рис.11). Для доказательства того, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах, обращались к рис. 12, *а*, *б*.

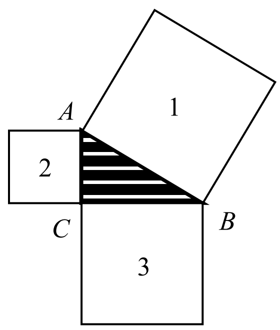
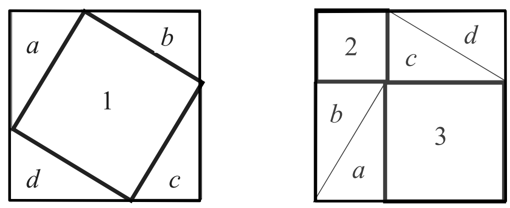


Рис. 11

На них показано, что квадрат 1 и взятые вместе квадраты 2 и 3 можно дополнить четырьмя треугольниками *a*, *b*, *c* и *d*, равными $\triangle ABC$, до квадрата. Длина стороны каждого из них равна сумме длин катетов треугольника *ABC*. Тем самым теорема Пифагора доказана [2].



а *б*

Рис. 12

Заметное место в изучении пифагорейцами свойств геометрических фигур, вычислении их площадей занимало преобразование в *равновеликие* фигуры. Основой его послужила *теорема* о равновеликости треугольников с одним и тем же основанием и равными высотами, опущенными на это основание (рис. 13). Ее использовали для преобразования многоугольников (выпуклых и не являющихся таковыми) в равновеликие им треугольники. На рис. 14 и 15 показана процедура преобразования выпуклого и невыпуклого четырехугольников в равновеликие им треугольники.

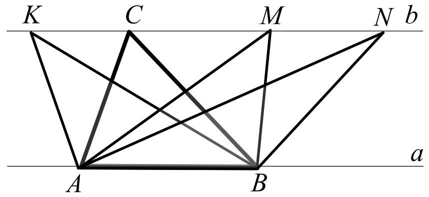


Рис. 13

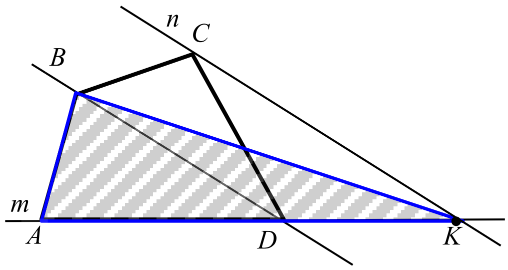


Рис. 14

Построение:

1. m: $[AD] \times m$;
2. $[BD]$;
3. n: n [illegible]$D]$, $C \times n$;
4. $K = m$)(n;
5. $[BK]$. $S_{\Delta ABK} = S_{ABCD}$.

В случае невыпуклого четырехугольника теорема применялась к равновеликим треугольникам *BDC* и *BDF*.

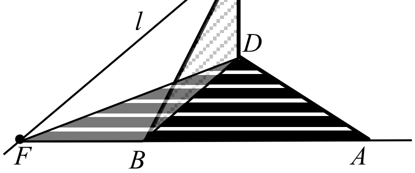


Рис. 15

Построение:

1. $[BD]$;
2. l: l [illegible]$D]$, $C \times l$;
3. $F = AB$)(l;
4. $[FD]$. ΔAFD – искомый, так как $S_{\Delta BDC} = S_{\Delta BDF}$, откуда $S_{ABCD} = S_{\Delta AFD}$.

Заметим, что в некоторых случаях пифагорейцы преобразовывали невыпуклый четырехугольник в равновеликий ему выпуклый, после чего выполняли дальнейшие построения. Так, на рис. 16 четырехугольник *ABCD* преобразован в выпуклый *AEKF* после замены двух пар равновеликих треугольников: *ECB* на *ECK* и *CFD* на *CFK*.

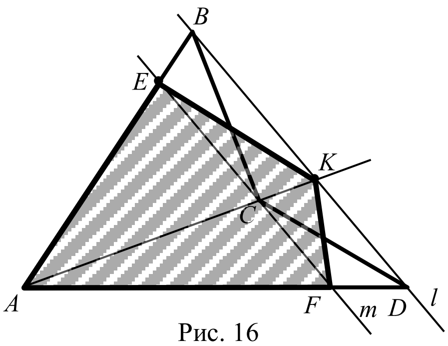


Рис. 16

Построение:

1. $[AC)$;
2. $[BD]$ ✚ l;
3. m: m [illegible]$C \times m$;
4. $E = m$)($[AB]$, $F = m$)($[AD]$, $K = [AC)$)(l;
5. EK, KF. $S_{ABCD} = S_{AEKF}$.

Аналогичным образом преобразовывались выпуклые 5–, 6– ,…, *n*–угольники в равновеликие им треугольники, а затем – в прямоугольники и квадраты. Последние сравнивали с эталоном. На рис. 17 показано преобразование шестиугольника *ABCDEF* в равновеликий ему треугольник *MCK*.

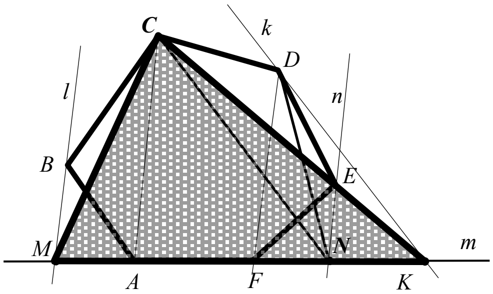


Рис. 17

Построение:

1. m: AF ✚ m;
2. $[AC]$, $[FD]$;
3. l: l [illegible]$C]$, $B \times l$, n: n [illegible]$D]$, $E \times n$;
4. $M = m$)(l, $N = m$)(n;
5. $[CM]$, $[DN]$, $[CN]$;
6. k: k [illegible]$N]$, $D \times k$;

7. $K=k$)(m;
8. $[CK]$.

Шестиугольник $ABCDEF$ последовательно преобразовывался в равновеликие ему 5–, 4– и 3–угольник, поэтому $S_{ABCDEF} = S_{MCDEF} =$ $= S_{MCDN} = S_{\Delta MCK}$.

Затем треугольник MCK преобразовывали в равновеликий ему прямоугольник $MSTK$ (рис. 18).

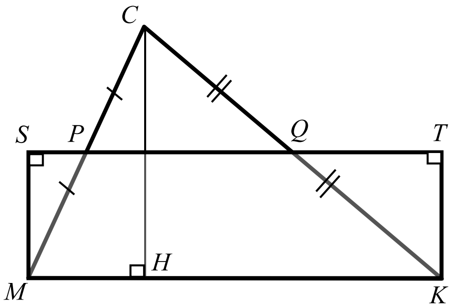


Рис. 18

Построение:
1. $[PQ]$ – средняя линия ΔMCH;
2. $[MS]$: $[MS] \perp PQ$, $S \times PQ$;
$[KT]$: $[KT] \perp PQ$, $T \times PQ$. $S_{MSTK} = S_{\Delta MCK}$.

Используя параболический метод приложения площадей, пифагорейцы преобразовывали $MSTK$ в равновеликий ему квадрат (рис. 19). Пусть $MK=a$, $SM=b$. Они дополняли прямоугольник $MSTK$ квадратом $TGLK$. Точкой O делили SG пополам. Тогда $SO = OG = \frac{a+b}{2}$, а $OT = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$. Затем на OG строили квадрат $OGYJ$ и доказывали, что S_{STKM}, равная ab, равновелика гномону $OGYY_1KO_1$, так как $MSTK$ и последний имеют общую площадь $OTKO_1$, а $S_{SOO_1M} = S_{TGYY_1} = \frac{a+b}{2} \cdot b$ [3].

Дальнейшее построение сводилось к последовательному выполнению операций:
1. ♥$(O; SO)$;
2. t: $t \perp SG$, $T \times t$;
3. $R=$♥)(t;

TR – сторона искомого квадрата.

Поэтому $S_{TRUV} = S_{STMK}$. Следовательно, $S_{ABCDEF} = S_{TRUV}$.

В "Началах" Евклида (III в. до н.э.) широко использована геометрическая алгебра. Среди его задач отметим следующие три [4].

1. К двум прямым [отрезкам] найти среднюю пропорциональную. Задача была решена еще в пифагорейской школе с использованием параболического метода приложения площадей.

2. Разделить AB в точке H на две части, чтобы прямоугольник, заключенный между целым отрезком AB и одной из его частей, был равен квадрату, построенному на другой его части (Предложение XI книги II "Начал" (деление отрезка в отношении "золотого сечения").

Построение: На отрезке AB Евклид строил квадрат $ABCD$, точку E – середину стороны AD – соединил с вершиной B (рис.20) и продолжил DA за точку A так, чтобы $EF=BE$. На AF построил квадрат $AFGH$. Наконец, продолжил GH до пересечения с DC в точке K.

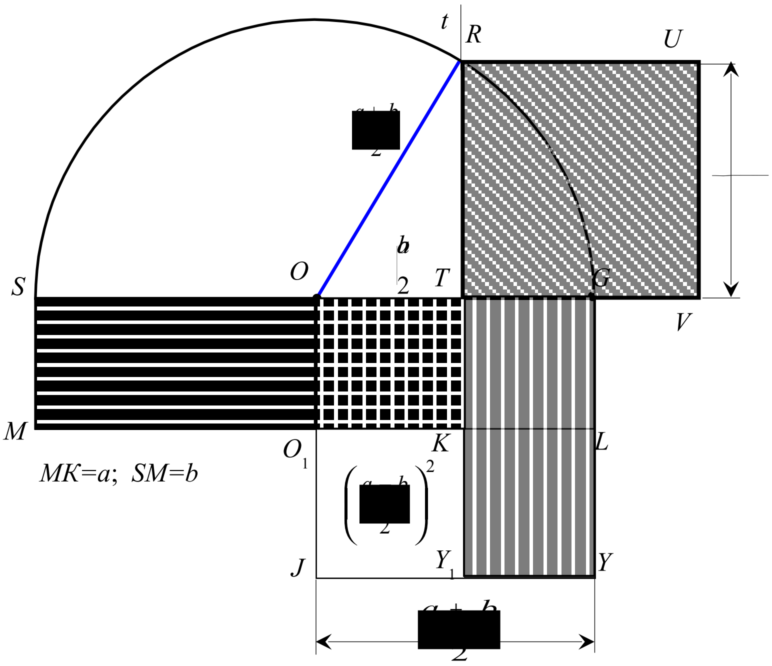


Рис. 19

Отрезок AB оказался разделенный точкой H в соответствии с условием задачи: $AH^2 = AB \cdot BH$ [4].

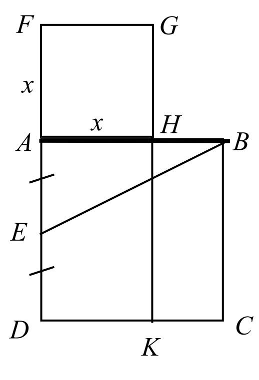


Рис. 20

Действительно, используя современную

символику, обозначим $AH = x$, $AB = a$. Тогда $HB = a - x$. Так как $AE = \frac{a}{2}$, то $FE = x + \frac{a}{2} = BE$. В $\triangle BAE$ $BE^2 = AB^2 + AE^2$ или $x^2 + \frac{a^2}{4} + ax = a^2 + \frac{a^2}{4}$. После упрощений получим $x^2 = a^2 - ax$, т. е. $x^2 = a(a - x)$.

3. "Квадрат, построенный на стороне вписанного [правильного] пятиугольника, равен сумме квадратов сторон вписанных в тот же круг правильных шестиугольника и десятиугольника", (Предложение X книги XIII "Начал").

Евклид предложил геометрическое доказательство задачи, показав справедливость тождества $a_5^2 = a_{10}^2 + a_6^2$. Длины сторон a_5, a_{10} и a_6 он выразил через радиус описанной окружности R: $a_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, $a_{10} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$, $a_6 = R$, а затем доказал справедливость тождества [4]. Аналитическое доказательство имеет вид

$$\frac{R^2}{4}\left(10 - 2\sqrt{5}\right) = \frac{R^2}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right)^2 + R^2 =$$

$$= \frac{R^2}{4}\left(6 - 2\sqrt{5}\right) + R^2.$$

Сократив обе части равенства на $\frac{R^2}{4}$, получим $10 - 2\sqrt{5} = 6 - 2\sqrt{5} + 4 = 10 - 2\sqrt{5}$.

Средневековая Западная Европа унаследовала сведения из геометрической алгебры древних греков. Так, Абрахам Савасорда (Abraham Judaeus) из Барселоны (начало XIIв.) применил их при решении алгебраических уравнений и их систем. Его работы легли в основу "Practica Geometriae" (1224) Леонардо Пизанского. Для последнего случая он рассмотрел систему уравнений: $\begin{cases} x + y = 14, \\ xy = 48. \end{cases}$ Савасорда строил прямоугольник $ABCD$, площадь которого 48, и продолжил CD за точку C, так чтобы $DC + CF = 14$ (рис. 21). На отрезке DF построил квадрат $DFMK$ и провел CG ⊕ H. Очевидно, $S_{KABG} = x^2$, а $S_{KDFH} = 196$.

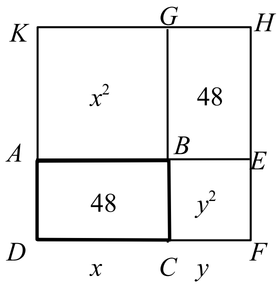


Рис. 21

Поэтому $S_{KABG} + S_{BCFE} = x^2 + y^2 = 100$. Но $2xy = 96$, следовательно, $(x - y)^2 = 4$, откуда $x - y = 2$. Учитывая первое уравнение системы, он нашел $x=8$, $y=6$ [5].

3. Применение геометрической алгебры

Сведения о геометрической алгебре древних греков проникли в страны арабского халифата, Китай и Индию. Как следует из [7], уже в трактате, относящемуся приблизительно к 1100 гг. до н.э., написанном в разговорной форме и касающемся свойств прямоугольного треугольника с длиной сторон 3, 4, 5, имеется задача: "Доказать, что удвоенная сумма квадратов катетов треугольника без квадрата их разности равна квадрату их суммы". Тождество $2(a^2 + b^2) - (a - b)^2 = (a + b)^2$ китайцы доказывали геометрически (рис. 22): составляли квадрат $ABCD$ из 49 клеток. Тогда $S_{AEFH} + S_{KCGM} + S_{HNGD} + S_{BKLE} - S_{MNFL} = S_{ABCD}$ или $2S_{AEFH} + 2S_{HNGD} - S_{MNFL} = S_{ABCD}$. В рассматриваемом случае

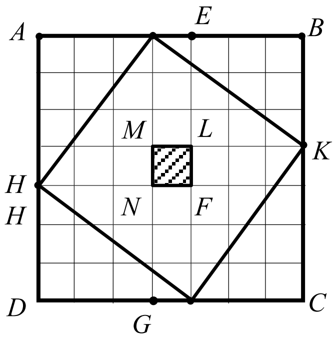


Рис. 22

$$2(4^2 + 3^2) - (4 - 3)^2 = (4 + 3)^2.$$

Аналогичная задача содержится в комментариях Конфуция к классическому труду "И – Кинг". В комментариях к трактату о "Чжоу-би" Чжан Цюнь Цинь (II–III вв.) привел следующую задачу, связанную с тео-

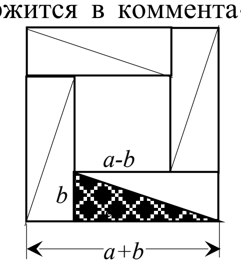


Рис. 23

ремой Пифагора: квадрат, построенный на сумме длин катетов a и b треугольника ($a > b$), разбивал ее на восемь треугольников, равных исходному, и внутренний квадрат со стороной, равной разности длин катетов (рис. 23) [6].

Ученые стран ислама также проявляли интерес к геометрическим построениям. Автором трактата по алгебре "Краткая книга об исчислении алгебры и алмукабалы" является Мухаммед ибн Муса ал-Маджуси ал-Хорезми (787 – ок. 850). Она состоит из трех частей: алгебраической, геометрической и обширной книги о завещаниях. Целью автора было написание руководства по решению общежитейских задач. Он представил шесть канонических видов линейных и квадратных уравнений, которые записал без символики. Ал-Хорезми сформулировал лишь правила, дающие возможность получить положительные корни уравнений, и применил их при решении уравнений с числовыми коэффициентами. После решения он приводил геометрические доказательства. Так, справедливость одного из решений уравнения $x^2 + 10x = 39$, которое впоследствии было помещено во многие арабские и европейские средневековые книги по алгебре, доказывалось с помощью геометрических построений (рис. 24). Строится искомый квадрат x^2, а на его сторонах – четыре прямоугольника шириной $\frac{5}{2}$. В вершинах квадрата добавляются четыре квадрата с длиной стороны $\frac{5}{2}$. Полученный большой квадрат имеет площадь

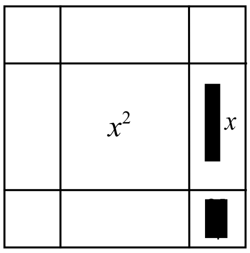


Рис. 24

$$39 + 4\left(\frac{5}{2}\right)^2 = 64$$

и сторону $x + 2\cdot\frac{5}{2} = 8$, поэтому $x = 3$.

Другое геометрическое доказательство решения этого уравнения приведено на рис.25.

Левая часть дополнялась до полного квадрата:
$x^2 + 2\cdot 5x + 25 = 39 + 25$;

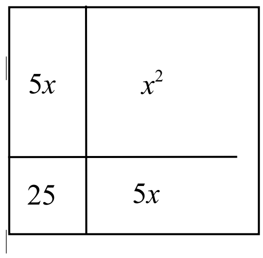


Рис. 25

$(x + 5)^2 = 8^2$, откуда $x + 5 = 8$ и $x = 3$. Отрицательные корни не учитывались [7].

В "Трактате о геометрических построениях" Абу–л–Вафы ал–Бузджани (940–998) имеется задача: построить квадрат из двух квадратов, длина сторон которых неизвестна [8]. Он предложил наложить один из них ($ABCD$) на другой ($AEFG$) и продолжить смежные стороны (BC и DC) первого до пересечения в точках N и M соответственно со сторонами большего квадрата; N и M соединил с A (рис. 26, *а*). Затем рассмотрел два равных прямоугольника $AEMD$, $ABNG$ и маленький квадрат $CMFN$. Прямоугольники $AEMD$, $ABNG$ разбивал диагоналями AM и AN на равные треугольники. Их катеты равны сторонам данных квадратов; CN – сторона $CMFN$ – равна разности длин катетов этих треугольников. Автор расположил около маленького квадрата четыре прямоугольных треугольника с катетами, равными сторонам исходных квадратов (рис. 26, *б*). Полученный квадрат $HRTS$ равновелик сумме двух данных квадратов с неизвестными длинами их катетов [2].

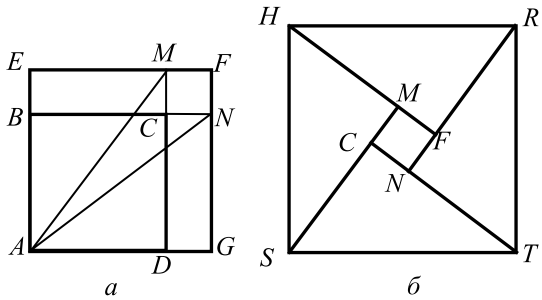


Рис. 26

Еще в одной задаче предлагалось разделить данный квадрат на два квадрата, если длина стороны одного известна. Абу-л-Вафа на сторонах квадрата $ABCD$ как на диаметрах описал внутри его полуокружности (рис. 27). Затем он рассмотрел хорды $AE = BF = CG = DH$, равные данной стороне. Очевидно, отрезки $AF = BG = CH = DE$ образуют ма-

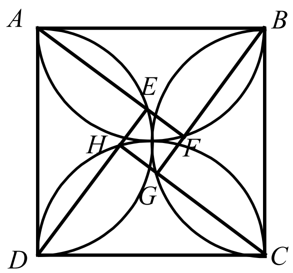


Рис. 27

ленький квадрат *EFGH* и четыре равных прямоугольных треугольника *AED*, *AFB*, *BGC*, *CHD*. Исходя из решения предыдущей задачи, Абу-л-Вафа составил из этих треугольников и *HEFG* искомый квадрат [8].

Из геометрических задач Абу-л-Вафы представляет интерес задача своеобразного построения квадрата, равновеликого трем равным квадратам. Ее решение было помещено во многих последующих руководствах (рис. 28, *а*–*в*). Ученый разделил диагоналями пополам первые два квадрата (рис. 28, *а*, *б*), полученные равнобедренные прямоугольные

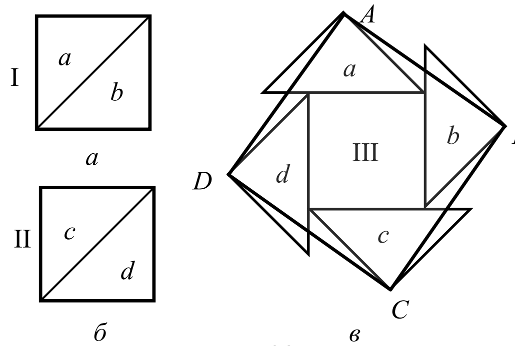


Рис. 28

треугольники *a*, *b*, *c*, *d* приложил гипотенузами к сторонам третьего квадрата, так чтобы каждая вершина последнего совпадала с вершиной не более одного треугольника. Если вершины этих треугольников последовательно соединить отрезками *AB*, *BC*, *CD* и *DA*, то получится искомый квадрат. Абу-л-Вафа указал на неточность методов, которыми решали эту задачу ремесленники. Он использовал и другие методы, в частности, строил сторону утроенного квадрата, взяв в качестве исходной диагональ куба, построенного на одном из данных квадратов. Относительно последнего важным представляется замечание: "Точно так же обстоит дело, если мы хотим построить квадрат, состоящий более чем из трех или менее чем из трех квадратов" [8, С. 118].

Заметим, что большая часть книги, как выяснилось в 60-х гг. прошлого века, текстуально совпадает с написанной на полвека раньше "Книгой духовных искусных приемов и природных тайн о тонкостях геометрических фигур" Абу Насра ал-Фараби (870–950) [2].

Арабские ученые использовали геометрическую алгебру и при решении уравнений. В трактате Омара Хайяма (XI в.) "Об алгебраических доказательствах" приведена задача, в которой содержатся словесные правила для геометрического построения уравнений. Она имела вид: "Квадрат и десять корней равны 39". Ученый привел следующее решение: "Умножь половину корней саму на себя. Это произведение прибавь к числу [39]; а из корня квадратного вычти половину числа корней. Тогда остаток равен корню квадрата [$x = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - 5$]" [7].

Геометрическая интерпретация решения уравнения представлена на рис. 29. Пусть $S_{ABCD} = x^2$. Увеличенный на десять корней [$10x$], он равен 39.

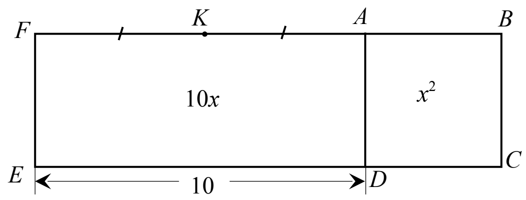


Рис. 29

Эти корни Омар Хайям представил в виде прямоугольника *ADEF*; *DE* = *AF* =10. Точкой *К* разделил *AF* пополам. Произведение *FB* и *BC*, равное S_{BCEF}, сложенное с квадратом, построенном на *АК*, равно квадрату, построенному на *BK* [$(10 + x)x + 25 = (x + 5)^2$]. Но площадь квадрата на *АК* равна 25, а $S_{BCEF} = 39$. Следовательно, площадь квадрата на *BK* и длина отрезка *BK* известны [$x + 5$]. После вычитания из *BK* длины отрезка *AK* можно найти *AD*, т.е. искомый отрезок *x* [7].

Наиболее ранние геометрические знания индийцев представлены в "Шульба-сутре" (VI–V вв. до н.э.) – руководстве по возведению алтарей и храмов. Строения ориентировали по странам света, в основании же их лежали определенные фигуры, которые были подобными или равновеликими геометрическими фигурами. Это требовало построения прямого угла, квадрата, прямоугольных треугольников с целочисленными длинами сторон, построения из них трапеций, преобразования прямоугольника в равновеликий ему квадрат,

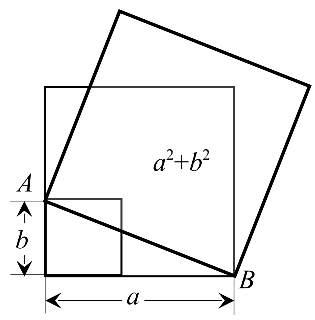


Рис. 30

преобразования квадрата, равновеликого сумме (рис. 30) или разности двух данных квадратов [9].

В процессе таких построений формулировались положения, которые впоследствии появятся в трактатах древних греков: параллелограммы, построенные на одном основании и между одними и теми же параллельными линиями, равновелики (рис. 31).

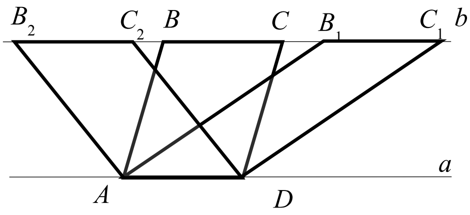


Рис. 31

Преобразование квадрата в равновеликий ему прямоугольник представлено на рис. 32 [9].

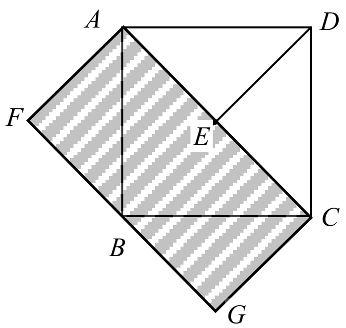


Рис. 32

Построение:
1. AC;
2. E: $E \times AC$, $AE = EC$;
3. ED;
4. $\triangle AFB = \triangle BGC = \triangle AED$. $S_{ACGF} = S_{ABCD}$.

Для построения квадратов, имеющих площадь в k раз больше площади данного, строили последовательно на диагоналях исходного квадраты со сторонами $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$, $2a$, $a\sqrt{5}$ и т.д. Процедура построения квадратов с использованием теоремы Пифагора при $k = 2 – 5$ представлена на рис. 33.

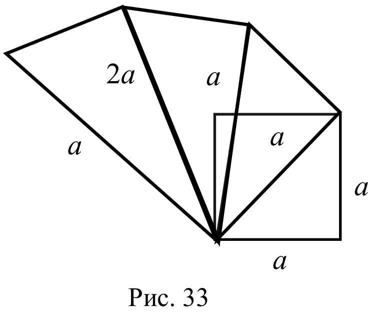


Рис. 33

Для преобразования квадрата в прямоугольник, одна из сторон которого известна (m), выполнялись построения (рис. 34):
1. $[AB]$;
2. $[AE]$: $E \times [AB]$;
3. $[BC]$, $[ED]$;
4. l: $E \times l$, $l \parallel [BC]$;
5. $F = [BC] \cap [ED]$, $G = l \cap [DC]$;
6. n: $F \times n$, $n \parallel [BE]$;
7. $M = l \cap n$, $N = n \cap [AD]$. $S_{NMGD} = S_{ABCD}$.

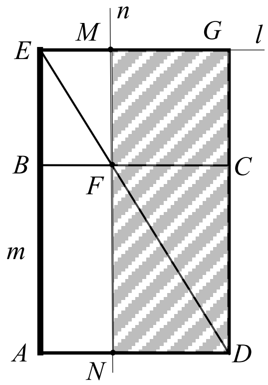


Рис. 34

Во всех геометрических построениях в "Шульба-сутре" важное место занимала теорема Пифагора. Составители руководства использовали шесть прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами: 3, 4, 5; 5, 12, 13; 8, 15, 17; 7, 24, 25; 12, 35, 37 и 15, 36, 39. Из этих и подобных им треугольников составлялись равнобедренные трапеции [9].

Среди геометрического материала индусов имеется задача, также связанная с теоремой Пифагора: дан треугольник с катетами a, b и гипотенузой c. На каждой из его сторон построили квадраты. Следовало сравнить площадь квадрата, построенного на гипотенузе, с суммой площадей квадратов, построенных на катетах (рис. 35).

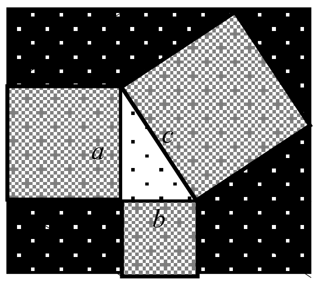


Рис. 35

Индийские ученые проявляли интерес к решению алгебраических уравнений, давая им геометрическую интерпретацию. Особый интерес представляли неопределенные уравнения. Так, уравнение, содержащее произведение неизвестных: $ax + by + c = xy$, индийцы преобразовали в вид $ab + c = xy – ax – by + ab$; $ab + c = x(y – a) – b(y – a)$, тогда $ab + c = (x – b)(y – a)$ (*). Если $ab + c$ могло быть представимо в виде двух множителей, т.е. mn, то множество решений имеет вид $x = m + b$; $y = n + a$.

Алгебраическое преобразование доказывалось геометрически (рис. 36). Разность между площадью прямоугольника xy и площадью гномона (заштрихованная часть), равной $ax + by - ab$, представлялась, с одной стороны, площадью прямоугольника $(x - b)(y - a)$, а с другой – площадью $ab + c$ (по условию),

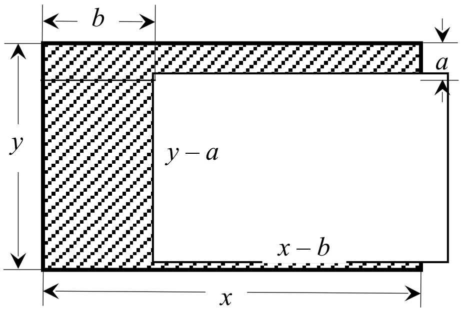


Рис. 36

откуда следует соотношение (*) [10].

Заключение

Представленный материал позволяет раскрыть интерес ученых различных стран к геометрической алгебре. Заслуживает внимание также дальнейшее изучение форм передачи математических сведений древних греков ученым средних веков.

Список литературы

1. *Рыбников К.А.* История математики. М.: Изд-во МГУ, 1974.
2. История математики с древнейших времен до начала нового времени / под ред. А.П. Юшкевича. М.: Наука, 1970.
3. *Башмакова И.Г.* Лекции по истории математики в Древней Греции // Ист.-мат. исследования. М.: Наука, 1958. Вып. XI.
4. *Евклид*. Начала: в 3 т. / пер. и ком. Д.Д Мордухай–Болтовского. М., 1949–1950.
5. *Bortolotti E. L.* L'algebra nella storia e nella preistoria della scienze // Osiris. 1936. Vol.1. P.184–230.
6. *Gandz S.* The origin and development of the quadratic equation in babylonian, greek and early arabic algebra // Osiris. 1937. Vol. 3. P.405–557.
7. *Юшкевич А.П.* История математики в средние века. М.: Физматгиз, 1961.
8. *Абу-л-Вафа*. Книга о том, что необходимо знать ремесленнику из геометрических построений / пер. и примеч. С.А. Красновой // Физ.-мат. науки в странах Востока. 1966. Вып. 1 (4). С. 56–140.
9. *Володарский А.И.* Очерки истории математики. М.: Наука, 1977. Гл. 6.
10. *Zeuthen H.G.* Sur l'arithmétique géometrique des Grecs et des Indiens // Biblioteca Mathematica. 1904. F. 3, Bd. 5. P. 97–112.

Influence of geometrical algebra of ancient Greece on development of mathematics

A. E. Malykh, V. I. Danilova
Perm State Pedagogical University, Russia, 614000, Perm, Sibirskaja st., 24
malych@pspu.ru; (342) 280-37-55

The formation of geometrical algebra in ancient Greece is described. Its applications to decision of equations, proof of algebraical identities, theorems; to construction of figures are presented. Influence of geometrical algebra on solving of mathematical problems in Arabic countries, China and India is shown.

Key words: *geometrical algebra; operations with segments; applicable of areas; areas of figures; supplement, cutting, transformation, comparison; algebraical equations*.