ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2012 Математика. Механика. Информатика Вып. 2(10)

МАТЕМАТИКА

УДК 519.929

Устойчивость одного дифференциально-разностного уравнения с периодическим кусочно-постоянным коэффициентом

С. М. Седова
Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Россия, 614990, Пермь, Комсомольский пр-т, 29
vm@pstu.ru; (342) 2-391-697

Построены области асимптотической устойчивости и неустойчивости одного скалярного дифференциально-разностного уравнения с одним запаздыванием и периодическим кусочно-постоянным коэффициентом в плоскости параметров уравнения.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом; области асимптотической устойчивости и неустойчивости.*

Введение

Предлагаемая работа является продолжением исследований, опубликованных в работе [1] .

Рассматриваем задачу Коши для дифференциально-разностного уравнения с периодическими коэффициентами

$$\dot{x}(t)-\sum_{k=0}^{m}a_k(t)x(t-k\omega)=f(t)\,,\ t>0\,, \quad (1)$$
$$x(\xi)=0\,,\ \xi<0\,;\ x(0)=1\,,$$

где $a_k(t)-$ периодическая функция с периодом $T_k = l_k\omega$, $l_k\in\{1,2,...,m\}$, $k=\overline{0,m}$, т.е. периоды T_k рационально соизмеримы с запаздываниями $k\omega$, $f\in L_{loc}[0,\infty)$. В работе [1] для задачи Коши уравнения (1) был сформулирован критерий устойчивости, полученный в [2], [3], [4], в редакции [4]. В [4] критерий имеет вид: $a_k\in L_\infty[0,m\omega]$, $k=\overline{0,m}$, $C(t,s)-$ функция Коши уравнения (1) [5], [6], [7], $\Delta_m^m(z)$ – характеристическая функция уравнения (1) [4], функция Коши $C(t,s)$ имеет экспоненциальную оценку

$$|C(t,s)|\le N\exp(-\alpha(t-s)),\ t\ge s\ge 0,$$

при некоторых $N>0$, $\alpha>0$ (задача 1) тогда и только тогда, когда наименьший по модулю корень z_0 уравнения $\Delta_m^m(z)=0$ лежит вне единичного круга: $|z_0|>1$ (задача 2). Согласно критерию задача устойчивости (задача 1) сведена к задаче о расположении нуля z_0 целой функции $\Delta_m^m(z)$ комплексного переменного z относительно единичной окружности (задача 2).

В работе [1] предложен способ решения задачи 2, сформулированный в теоремах 2, 3, которые названы основными. В [1] характеристическая функция $\Delta_m^m(z)$ обозначена через $g(z)$ и подчеркнута зависимость от конечного числа параметров

$$p=\{p_1,p_2,...,p_h\},\ g(z,p).$$

В основных теоремах критерий устойчивости приобретает такую формулировку, которая позволяет строить (или описывать) область асимптотической устойчивости S в пространстве параметров Op, а также область неустойчивости $H = Op \setminus \overline{S}$.

В предлагаемой работе с помощью теоремы 2 (теоремы 2 и 3 [1]) осуществлено построение областей S и H для уравнения с одним запаздыванием ω и 2ω – кусочно-постоянным коэффициентом

$$\dot{x}(t) = b(t)x(t-\omega)\,,\ t > 0\,, \qquad (2)$$
$$x(\xi) = 0\,,\ \xi < 0\,;\ x(0) = 1\,,$$
$$b(t+2\omega) = b(t)\,,\ b(t) = \begin{cases} \alpha_1, & 0 \le t < \omega \\ \alpha_2, & \omega \le t < 2\omega \end{cases}.$$

Область S для уравнения (2) приведена в работе [4], но без обоснования построения и с ошибками. Поскольку в [4] решались другие задачи, построение областей S и H было обозначено как перспектива.

Приведем необходимые для данной статьи обозначения и результаты. Пусть

$$a = \omega(\alpha_1 + \alpha_2)/2\,, q = \omega\sqrt{|\alpha_1\alpha_2|}\,.$$

В работе [4] получены характеристические функции $g(z)$ уравнения (2). В случае $\alpha_1\alpha_2 > 0$ функция $g(z)$ имеет вид

$$g(z) = 1 - z^2 - (2a/q)\,z\,sh(qz)\,; \qquad (3)$$

в случае $\alpha_1\alpha_2 < 0$

$$g(z) = 1 - z^2 - (2a/q)\,z\sin(qz)\,; \qquad (4)$$

в случае $\alpha_1\alpha_2 = 0$ $(q = 0)$

$$g(z) = 1 - z^2 - 2a\,z^2\,. \qquad (5)$$

Как видно из выражений (3)–(5), функция $g(z)$ зависит от двух параметров – a, q, т.е. $g(z,a,q), a \in R, q \ge 0$. Выполнено условие $g(0) = 1$. Функция $g(z)$ – целая функция в комплексной плоскости C. Область асимптотической устойчивости S уравнения (2) принадлежит полуплоскости $0aq, q \ge 0$. Область неустойчивости H уравнения (2) есть

$$H = \{(a,q) : -\infty < a < \infty, q \ge 0\} \setminus \overline{S}\,.$$

Критерий устойчивости для задачи Коши уравнения (2) имеет следующую формулировку.

Теорема 1. Пусть z_0 – наименьший по модулю нуль функции $g(z)$. Если $|z_0| > 1$, то уравнение (2) асимптотически устойчиво, если $|z_0| < 1$, то уравнение (2) неустойчиво, если $|z_0| = 1$, то уравнение (2) может быть устойчиво (неасимптотически) или может быть неустойчиво.

Сформулируем теоремы 2, 3 из [1].

Пусть рассматривается уравнение (1), $w = g(z)$ – характеристическая функция уравнения (1), целая функция на плоскости C. Известно, что $g(0) = 1$. Пусть U – единичный круг на плоскости C: $|z| < 1$. $D = g(U)$ – образ единичного круга U при отображении $g(z)$, $\partial D = g(\partial U)$ – линия, ограничивающая D. $\overline{D} = D \bigcup \partial D$. Отметим свойства множества D:

1. ∂D – замкнутая кривая. Кривая ∂D может иметь точки самопересечения (т.е. может не являться жордановой кривой [8]).

2. D – область (открытое связное множество в C) [8].

3. Область D симметрична относительно вещественной оси Ou, т.е. если $w \in D$, то и $\overline{w} \in D$.

Рассмотрим образ ∂D единичной окружности $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0,2\pi]$, при отображении $g(z)$ и функцию $w = g(e^{i\varphi})$, $\varphi \in [0,2\pi]$, задающую ∂D. Пусть в функции $w = g(e^{i\varphi})$ выделены вещественная $u(\varphi)$ и мнимая $v(\varphi)$ части

$$g(e^{i\varphi}) = u(\varphi) + iv(\varphi)\,;$$

выражение $g(z)$ зависит от конечного числа параметров, т.е. $g(z,p)$, $p = (p_1,...,p_h)$, для уравнения (2) $g(z,a,q)$. Пусть известны все или часть нулей функции $v(\varphi)$, т.е. $\varphi_k \in [0,2\pi]$, при которых $v(\varphi_k) = 0$, $k = \overline{1,n}$.

Теорема 2 (теоремы 2, 3 [1])

1) Пусть в точке $P(p)$ пространства параметров Op уравнения (1) ($P(a,q)$ плоскости параметров $0aq$ уравнения (2)) при некотором $\varphi_k \in [0,2\pi]$ имеем $v(\varphi_k) = 0$ и

$u(\varphi_k) < 0$, тогда точка P принадлежит области неустойчивости H уравнения (1).

2) Пусть в точке $P(p) \in Op$ при всех $\varphi \in [0,2\pi]$, для которых $v(\varphi) = 0$, имеет место неравенство $u(\varphi) > 0$, тогда точка P принадлежит области S асимптотической устойчивости уравнения (1).

Замечание 1. Система

$$\begin{cases} v(\varphi, p) = 0 \\ u(\varphi, p) > 0, \end{cases} \quad \forall \varphi \in [0,2\pi],$$

задает область асимптотической устойчивости S уравнения (1) в пространстве Op параметров p уравнения (1).

Замечание 2. При построении областей S и H уравнения (2) промежуток $[0,2\pi]$ для φ можно уменьшить до промежутка $[0,\pi]$, так как из выражений (3)–(5) для функции $g(z)$ получаем, что единичный круг U дважды отображается при отображении $g(z)$ в область D. Действительно,

$$g(1) = g(e^{i0}) = g(e^{i\pi}) = g(-1),$$

т.е. граница ∂D является замкнутой линией при $\varphi \in [0,\pi]$. При $\varphi \in [\pi,2\pi]$, выполнив подстановку $\varphi = t + \pi$, $t \in [0,\pi]$, имеем

$$w = g(e^{i\varphi}) = g(e^{i(t+\pi)}) = g(-e^{it}) = g(e^{it}),$$

т.е. при изменении φ от π до 2π точка $w \in \partial D$ опишет ту же замкнутую линию, что и при изменении φ от 0 до π.■

Учтя замечания 1,2, получим, что система

$$\begin{cases} v(\varphi, a, q) = 0 \\ u(\varphi, a, q) > 0, \end{cases} \quad \forall \varphi \in [0,\pi], \tag{6}$$

задает область асимптотической устойчивости S уравнения (2) в полуплоскости $0aq$, $q \ge 0$ параметров a и q уравнения (2).

Замечание 3. Уравнения

$$u(\varphi, a, q) = 0, \; v(\varphi, a, q) = 0$$

определяют на плоскости $0aq$ линию L, каждой точке которой соответствует корень z_0 уравнения $g(z, a, q) = 0$ на единичной окружности, т.е. $z_0 \in \partial U$.

1. Случаи $\alpha_1\alpha_2 = 0$ и $\alpha_1\alpha_2 > 0$

Теорема 3. Пусть $\alpha_1\alpha_2 = 0$ ($q = 0$). Область S на прямой $0a$ есть интервал

$$S = \{a : a \in (-1,0)\}. \tag{7}$$

Доказательство. Здесь области S и H находятся на прямой $0a$. Характеристическая функция $g(z)$ имеет вид (5). Согласно теореме 2 запишем функции $u(\varphi)$ и $v(\varphi)$ функции $g(e^{i\varphi})$:

$$u(\varphi) = 1 - (1 + 2a) \cdot \cos 2\varphi, \tag{8}$$
$$v(\varphi) = -(1 + 2a) \cdot \sin 2\varphi.$$

По теореме 2 и замечанию 2 следует найти нули функции $v(\varphi)$ в промежутке $[0,\pi]$ и для построения области $H \subset 0a$ потребовать, чтобы $u(\varphi) < 0$ на этих нулях. Имеем $v(\varphi) = 0$ при $\varphi = 0, \pi/2, \pi$, а также при $a = -0.5$. Из неравенства $u(0) \equiv -2a < 0$ получаем $a > 0$. Из неравенства $u(\pi/2) \equiv 2 + 2a < 0$ следует $a < -1$. Так как $u(\pi) = u(0)$, то не возникает новых ограничений на a. При $a = -0.5$ имеем:

$$u(\varphi) \equiv 1 > 0, \; \forall \varphi \in [0,\pi], \tag{9}$$

поэтому $a = -0.5 \notin H$. В результате

$$H = \{a : a \in (-\infty,-1) \cup (0,+\infty)\}.$$

При $a = -1$, при $\varphi = \pi/2$ в (8) $u(\pi/2) = 0$, $v(\pi/2) = 0$, т.е. $g(e^{i\pi/2}) \equiv$ $\equiv g(i) = 0$, и точка $z_0 = i$, принадлежащая единичной окружности, есть корень характеристического уравнения $g(z) = 0$, т.е. $a = -1 \notin S$.

При $a = 0$, $\varphi = 0$ (или $\varphi = \pi$) в (8) имеем $u(0) = 0$, $v(0) = 0$, т.е. $g(e^{i0}) \equiv g(1) = 0$, и точка $z_0 = 1$, принадлежащая единичной окружности, есть корень характеристического уравнения $g(z) = 0$, т.е. $a = 0 \notin S$. Таким образом, $S = 0a \setminus \overline{H}$, или в виде (7): $S = \{a : a \in (-1,0)\}$.

Область S можно построить и непосредственно по теореме 2 с учетом замечания

2 (или по системе (6)): в нулях функции $v(\varphi)$ ($\varphi = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ a = -0.5$) следует потребовать одновременного выполнения неравенства $u(\varphi) > 0$. Таким образом,

$$\begin{cases} u(0) = u(\pi) = -2a > 0 \\ u(\pi/2) = 2 + 2a > 0, \end{cases}$$

или $a \in (-1,0) = S$. Согласно (9) точка $a = -0.5 \in S$.■

Теорема 4. Пусть $\alpha_1\alpha_2 > 0$. Область S в полуплоскости $0aq, q \ge 0$ задается неравенствами

$$a \le -q,\ a > -q/\sin q,\ 0 < q < \pi/2. \quad (10)$$

Замечание 4. Первое из неравенств (10) следует из естественного неравенства, связывающего среднее арифметическое $a/\omega = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$ и среднее геометрическое $q/\omega = \sqrt{\alpha_1\alpha_2}$ двух чисел : α_1, α_2.

Замечание 5. Координаты a и q точки на плоскости $0aq$ будем использовать в двух смыслах: 1) для обозначения координат точки на плоскости $0aq$, 2) для обозначения координат точки на плоскости $0aq$, но учитывать при этом, что a/ω – среднее арифметическое, q/ω – среднее геометрическое двух чисел: α_1, α_2, поэтому для них в случае $\alpha_1\alpha_2 > 0$ выполняется одно из неравенств: $a \ge q$ или $a \le -q$.

Доказательство. Характеристическая функция $g(z)$ имеет вид (3). Согласно теореме 2 запишем функции $u(\varphi)$ и $v(\varphi)$ функции $g(e^{i\varphi})$:

$$u(\varphi) = 2\sin^2\varphi - (2a/q)(\cos\varphi\, sh\alpha \cos\beta - \\ -\sin\varphi\, ch\alpha \sin\beta),$$

$$v(\varphi) = -\sin 2\varphi - (2a/q)(\cos\varphi\, ch\alpha \sin\beta + \\ +\sin\varphi\, sh\alpha \cos\beta), \quad (11)$$

здесь $\alpha = q\cos\varphi, \beta = q\sin\varphi$, $\varphi \in [0,\pi]$.

Рассмотрим последовательно случаи:

1) $\sin\varphi = 0$, 2) $\cos\varphi = 0$, 3) $sh\alpha = 0$, 4) $\sin\beta = 0$, 5) $\cos\beta = 0$.

1) $\sin\varphi = 0$ при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Имеем $v(0) = v(\pi) = 0, u(0) = u(\pi) \equiv -(2a/q)\, shq$. При $u(0) < 0$ получаем, что $a > 0$, тогда с учетом замечания 5 имеем

$$\{(a,q) : a \ge q, q > 0\} \subset H, \quad (12)$$

$$S \subset \{(a,q) : a \le -q, q > 0\}. \quad (13)$$

Далее считаем, что $\varphi \in (0,\pi)$.

2) $\cos\varphi = 0$ при $\varphi = \pi/2$.
Имеем $v(\pi/2) = 0$, $u(\pi/2) \equiv 2 + (2a/q)\sin q$.

Из условия $u(\pi/2) < 0$ следует, что

$$\{(a,q) : 1 + (a/q)\sin q < 0, q > 0\} \subset H, \quad (14)$$

$$S \subset \{(a,q) : 1 + (a/q)\sin q > 0, q > 0\}. \quad (15)$$

Далее считаем, что

$$\varphi \in (0,\pi/2) \cup (\pi/2,\pi).$$

3) $sh\alpha = 0$ при $q = 0$, что рассмотрено в теореме 3, или при $\varphi = \pi/2$, что рассмотрено в пункте 2).

4) $\sin\beta = 0$ при $\beta = \pi k$, $k \in Z$, или $q\sin\varphi = \pi k$. Случай $k = 0$ рассмотрен в теореме 3 и пункте 1), поэтому считаем, что $k \in Z$, $k \ne 0$. Так как $q > 0$, $\sin\varphi > 0$, то считаем, что $k \in N$.

Так как $\cos\beta = \pm 1$, то в (11)

$$v(\varphi) = -\sin 2\varphi \mp (2a/q)\sin\varphi\, sh\alpha.$$

Если $v(\varphi) = 0$, то $a = \mp q\cos\varphi / sh\alpha$ и

$$u(\varphi) = 2\sin^2\varphi + \frac{2\cos^2\varphi}{sh\alpha} sh\alpha = 2 > 0, \\ \forall \varphi \in (0,\pi/2) \cup (\pi/2,\pi),$$

что не изменяет условий неустойчивости (12),(14).

5) $\cos\beta = 0$ при $\beta = \pi/2 + \pi k$, $k \in Z$, или

$$q\sin\varphi = \pi/2 + \pi k,\ k \in N \cup \{0\}, \quad (16)$$

с учетом того, что $q > 0$, $\sin\varphi > 0$.

а) Рассмотрим случай: в (16) $k = 0$, $q\sin\varphi = \pi/2$, т.е. $\sin\beta = 1$. Так как $q = \pi/(2\sin\varphi)$, то $q \ge \pi/2$. Из (11) имеем

$$v(\varphi) = -\sin 2\varphi - (2a/q)\cos\varphi\, ch\alpha. \quad (17)$$

Если $v(\varphi) = 0$, то

$$a=-(q\sin\varphi)/ch\alpha=-\pi/(2ch\alpha)\,, \qquad (18)$$

при этом имеем

$$u(\varphi)=2\sin^2\varphi+\frac{2\sin\varphi}{ch\alpha}(-\sin\varphi\, ch\alpha)=0\,,$$
$$\forall\varphi\in(0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi)\,.$$

При

$$a<-\pi/(2ch\alpha)=-\pi/(2ch(q\cos\varphi))=$$
$$=-\pi\Big/(2ch\sqrt{q^2-(\pi/2)^2})$$

имеет место неравенство $u(\varphi)<0$, поэтому следует считать, что область ниже линии (18) принадлежит области неустойчивости. При $q>\pi/2$ линия (18):

$$a=-\pi/(2ch\alpha)=-\pi\Big/(2ch\sqrt{q^2-(\pi/2)^2})\,,$$

находится в области

$$\{(a,q):a>-q,q>\pi/2\}\,, \qquad (19)$$

в которой параметры a (среднее арифметическое) и q (среднее геометрическое) не находятся (см. рис. 1).

Таким образом,

$$\{(a,q):a\le -q,q>\pi/2\}\subset H\,. \qquad (20)$$

б) Рассмотрим случай: в (16) $k=1,\beta=3\pi/2$, т.е. $q\sin\varphi=3\pi/2$, $\sin\beta=-1$, $q\ge 3\pi/2$. В (11)

$$v(\varphi)=-\sin 2\varphi+(2a/q)\cos\varphi\, ch\alpha\,. \qquad (21)$$

Если $v(\varphi)=0$, то

$$a=(q\sin\varphi)/ch\alpha=3\pi/(2ch\alpha)\,,$$

при этом

$$u(\varphi)=2\sin^2\varphi-\frac{2\sin\varphi}{ch\alpha}\sin\varphi\, ch\alpha=0\,,$$
$$\forall\varphi\in(0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi)\,.$$

При $a>3\pi/(2ch\alpha)>0$ имеет место неравенство $u(\varphi)<0$, но этот случай учтен в пункте 1).

В пунктах 5),а), 5),б) рассмотрены случаи $k=0{,}1$ в (16). Остальные случаи k, $k=2{,}3{,}\ldots$, не налагают новых ограничений для области H. Действительно, при $k=2j$, $j\in N$, возникает случай, аналогичный случаю 5),а). В (16)

$$q\sin\varphi=\pi/2+2j\pi\,,\ q\ge\pi/2+2j\pi\,.$$

Линии $a=-(\pi/2+2j\pi)/ch\alpha=$

$$=-(\pi/2+2j\pi)\Big/ch\sqrt{q^2-(\pi/2+2j\pi)^2}\,,$$

получающиеся из (17) при $v(\varphi)=0$, расположены в области (19), в которой параметры a (среднее арифметическое) и q (среднее геометрическое) не определены (см. рис. 1).

Если в (16) $k=2j+1$ $j\in N$, то получаем случай, аналогичный случаю 5),б). В (16)

$$q\sin\varphi=\pi/2+(2j+1)\pi\,,q\ge\pi/2+(2j+1)\pi\,.$$

Линии $a=(\pi/2+(2j+1)\pi)/ch\alpha=$

$$(\pi/2+(2j+1)\pi)\Big/ch\sqrt{q^2-(\pi/2+(2j+1)\pi)^2}$$

получающиеся из (21) при $v(\varphi)=0$, расположены в области

$$\{(a,q):0<a<q,q\ge\pi/2+(2j+1)\pi\}\,,$$

в которой параметры a (среднее арифметическое) и q (среднее геометрическое) не определены (см. рис. 1).

Объединив (12),(14),(20) , получим, что

$$\{(a,q):(a\ge q,q>0)\cup$$
$$\cup(a<-q/\sin q,0<q<\pi/2)\cup$$
$$\cup(a\le -q,q>\pi/2)\}\subset H\,,$$

поэтому выполнено согласно (13), (15)

$$S\subseteq\{(a,q):a\le -q,a>-q/\sin q\,,$$
$$0<q<\pi/2\}\,. \qquad (22)$$

Покажем, что в (22) имеет место равенство.

Если, исходя из уравнения $v(\varphi)=0$, $v(\varphi)$ в (11), выразить

$$a=-\frac{q\sin 2\varphi}{2(\cos\varphi\, ch\alpha\sin\beta+\sin\varphi\, sh\alpha\cos\beta)}\,, \qquad (23)$$

$$\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi)\,,$$

и подставить в $u(\varphi)$ в (11), то получим

$$u(\varphi)=\frac{2\sin\varphi\, sh\alpha\cos\beta}{\cos\varphi\, ch\alpha\sin\beta+\sin\varphi\, sh\alpha\cos\beta}\,. \qquad (24)$$

Выразив знаменатель в (24) из (23), получим

$$u(\varphi) = -\frac{2a}{q}\cdot\frac{sh(q\cos\varphi)}{\cos\varphi}\cdot\cos\beta\,. \qquad (25)$$

При $0 < q < \pi/2$ выполнены условия

$$0 < \beta = q\sin\varphi < \pi/2 \text{ и } \cos\beta > 0\,.$$

Так как $a < 0$, то в (25) $u(\varphi) > 0$ независимо от того, есть ли значения a, удовлетворяющие (23), поэтому в (22) имеет место равенство, и выполнено условие (10) (см. рис.1). ■

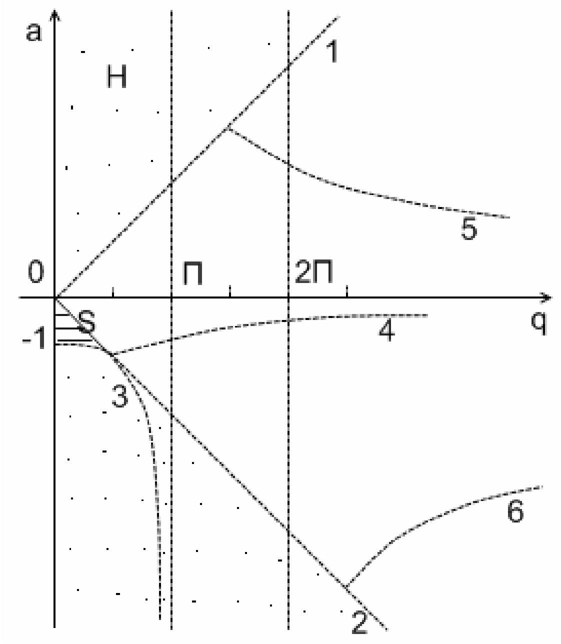

Рис. 1. *Случай* $\alpha_1\alpha_2 \ge 0$. *Область* S.
Линии: 1. $a = q$, *2.* $a = -q$, *3.* $a = -q/\sin q$,
4. $a = -\pi/(2ch\sqrt{q^2-(\pi/2)^2})$,
5. $a = 3\pi/(2ch\sqrt{q^2-(3\pi/2)^2})$,
6. $a = -5\pi/(2ch\sqrt{q^2-(5\pi/2)^2})$.

2. Случай $\alpha_1\alpha_2 < 0$

Теорема 5. Пусть $\alpha_1\alpha_2 < 0$. Область S в полуплоскости $0aq$, $q > 0$ задается неравенствами

$$S = \{(a,q) : (2j\pi < q < (2j+1)\pi,$$

$$-\frac{\sqrt{q^2-(2j\pi)^2}}{sh\sqrt{q^2-(2j\pi)^2}} < a < 0) \cup$$

$$\cup((2j+1)\pi < q < (2j+2)\pi, \qquad (26)$$

$$0 < a < \frac{\sqrt{q^2-((2j+1)\pi)^2}}{sh\sqrt{q^2-((2j+1)\pi)^2}}), j = 0,1,2,...\}.$$

Доказательство. Характеристическая функция $g(z)$ имеет вид (4). Функции $u(\varphi)$ и $v(\varphi)$ функции $g(e^{i\varphi})$ имеют вид

$$u(\varphi) = 2\sin^2\varphi - (2a/q)(\cos\varphi\sin\alpha\, ch\beta -$$
$$-\sin\varphi\cos\alpha\, sh\beta)\,,$$
$$v(\varphi) = -\sin 2\varphi - (2a/q)(\cos\varphi\cos\alpha\, sh\beta +$$
$$+\sin\varphi\sin\alpha\, ch\beta)\,, \qquad (27)$$

здесь $\alpha = q\cos\varphi, \beta = q\sin\varphi$, $\varphi \in [0,\pi]$.

Рассмотрим последовательно случаи:

1) $\sin\varphi = 0$, 2) $\cos\varphi = 0$, 3) $sh\beta = 0$, 4) $\sin\alpha = 0$, 5) $\cos\alpha = 0$.

1) $\sin\varphi = 0$ при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Имеем $v(0) = v(\pi) = 0, u(0) = u(\pi) \equiv -(2a/q)\sin q$. При $u(0) < 0$ получаем, что

$$\{(a,q) : (a > 0, \sin q > 0) \cup,$$
$$\cup (a < 0, \sin q < 0)\} \subset H\,. \qquad (28)$$

Тогда

$$S \subset \{(a,q) : (a < 0, \sin q > 0) \cup,$$
$$\cup (a > 0, \sin q < 0)\}\,. \qquad (29)$$

Далее считаем, что $\varphi \in (0,\pi)$.

2) $\cos\varphi = 0$ при $\varphi = \pi/2$. Имеем $v(\pi/2) = 0$, $u(\pi/2) = 2 + (2a/q)shq$. Из условия $u(\pi/2) < 0$ следует, что

$\{(a,q) : 1 + (a/q)shq < 0, q > 0\} \subset H$, или

$$\{(a,q) : a < -q/shq, q > 0\} \subset H\,. \qquad (30)$$
$$S \subset \{(a,q) : a > -q/shq, q > 0\}\,. \qquad (31)$$

3) $sh\beta = 0$, или $sh(q\sin\varphi) = 0$, при $q = 0$, что рассмотрено в теореме 3, или при $\sin\varphi = 0$, что рассмотрено в пункте 1).

4) $\sin\alpha = 0$ при $\alpha \equiv q\cos\varphi = \pi k$, $k \in Z$. Случай $k = 0, q \ne 0$ рассмотрен в пункте 2), здесь $\cos\varphi = 0$. Поэтому считаем, что $k \in Z$, $k \ne 0$.

а) пусть $\cos\alpha = 1$, тогда

$$k = 2j, j \in Z, j \ne 0\,.$$

В (27) $v(\varphi) = -\sin 2\varphi - (2a/q)\cos\varphi \cdot sh\beta$. Если $v(\varphi) = 0$, то

$$a = -(q\sin\varphi)/sh\beta = -\beta/sh\beta =$$

$$= -\sqrt{q^2-(2j\pi)^2}\Big/ sh\sqrt{q^2-(2j\pi)^2}\,, \quad (32)$$

при этом в (27)

$$u(\varphi)=2\sin^2\varphi+\frac{2\sin\varphi}{sh\beta}(-\sin\varphi\, sh\beta)=0\,.$$

В (32) можно считать, что $j\in N$.

При $a<-\beta/sh\beta$ имеет место неравенство $u(\varphi)<0$, поэтому

$$\{(a,q): a<-\frac{\sqrt{q^2-(2j\pi)^2}}{sh\sqrt{q^2-(2j\pi)^2}},$$
$$q>2j\pi, j\in N\}\subset H\,. \quad (33)$$

Отметим, что в (32) линия, соответствующая $j+1$, расположена выше линии, соответствующей j.

Для области S получаем с учетом (29)

$$S\subset\{(a,q): -\frac{\sqrt{q^2-(2j\pi)^2}}{sh\sqrt{q^2-(2j\pi)^2}}<a<0,$$
$$2j\pi<q<(2j+1)\pi, j\in N\}\,. \quad (34)$$

б) пусть $\cos\alpha=-1$, тогда $k=2j-1$, $j\in N$, и в формуле (27)

$$v(\varphi)=-\sin 2\varphi+(2a/q)\cos\varphi\, sh\beta\,.$$

Если $v(\varphi)=0$, то

$$a=(q\sin\varphi)/sh\beta=\beta/sh\beta=$$
$$=\sqrt{q^2-((2j-1)\pi)^2}\Big/ sh\sqrt{q^2-((2j-1)\pi)^2}\,,$$
$$u(\varphi)=2\sin^2\varphi-\frac{2\sin\varphi}{sh\beta}\sin\varphi\, sh\beta=0\,.$$

При $a>\beta/sh\beta$ имеет место неравенство $u(\varphi)<0$, поэтому

$$\{(a,q): a>\frac{\sqrt{q^2-((2j-1)\pi)^2}}{sh\sqrt{q^2-((2j-1)\pi)^2}},$$
$$q>(2j-1)\pi, j\in N\}\subset H\,. \quad (35)$$

Тогда для области S с учетом (29) имеем

$$S\subset\{(a,q): 0<a<\frac{\sqrt{q^2-((2j-1)\pi)^2}}{sh\sqrt{q^2-((2j-1)\pi)^2}},$$
$$(2j-1)\pi<q<2j\pi\,, j\in N\}\,. \quad (36)$$

5) $\cos\alpha=0$, $\alpha\equiv q\cos\varphi=\pi/2+\pi k, k\in Z$. $\sin\alpha=\pm1$. Исходя из (27),

$$v(\varphi)=-\sin 2\varphi\mp(2a/q)\sin\varphi\, ch\beta\,.$$

Если $v(\varphi)=0$, то $a=\mp(q\cos\varphi)/ch\beta$ и

$$u(\varphi)=2\sin^2\varphi+\frac{2\cos\varphi}{ch\beta}\cos\varphi\, ch\beta=2\,,$$

что не изменяет областей H и S.

Покажем, что область S совпадает с областью, в которой содержится согласно (29), (31), (34), (36)

$$S\subseteq\{(a,q): (2j\pi<q<(2j+1)\pi,$$
$$-\frac{\sqrt{q^2-(2j\pi)^2}}{sh\sqrt{q^2-(2j\pi)^2}}<a<0)\cup$$
$$\cup((2j+1)\pi<q<(2j+2)\pi, \quad (37)$$
$$0<a<\frac{\sqrt{q^2-((2j+1)\pi)^2}}{sh\sqrt{q^2-((2j+1)\pi)^2}}), j=0,1,2,...\}\,.$$

Пусть зафиксировано значение φ:

$$\varphi\in(0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi)\,; \quad (38)$$

$\alpha=q\cos\varphi$, $\beta=q\sin\varphi$. Исходя из уравнения $v(\varphi)=0$, $v(\varphi)$ в (27), выразим

$$a=-\frac{q\sin 2\varphi}{2(\cos\varphi\cos\alpha sh\beta+\sin\varphi\sin\alpha ch\beta)} \quad (39)$$

и, подставив в $u(\varphi)$ из (27), получим

$$u(\varphi)=\frac{2\sin\varphi\sin\alpha ch\beta}{\cos\varphi\cos\alpha sh\beta+\sin\varphi\sin\alpha ch\beta}\,.$$

Если выразить знаменатель в $u(\varphi)$ из (39) и подставить это выражение в $u(\varphi)$, то

$$u(\varphi)=-\frac{2a}{q}\cdot\frac{\sin|\alpha|}{|\cos\varphi|}\cdot ch\beta\,. \quad (40)$$

Для a из (39) получим выражение

$$a=-\frac{\beta}{\cos|\alpha|\cdot sh\beta+\sin|\alpha|\cdot\dfrac{\sin\varphi\cdot ch\beta}{|\cos\varphi|}}\,. \quad (41)$$

Отметим, что $\beta>0$, $sh\beta>0$, $\dfrac{\sin\varphi\cdot ch\beta}{|\cos\varphi|}>0$ с учетом (38).

Рассмотрим все возможные случаи знаков функций $\cos|\alpha|$ и $\sin|\alpha|$ и укажем при этом поведение a в (41) и $u(\varphi)$ в (40).

I. Зафиксируем некоторое $j, j=0,1,2,...$. Пусть

$$2j\pi < q < (2j+1)\pi. \qquad (42)$$

Известно (29), что область S содержится в нижней полуплоскости $a<0 (q>0)$. Покажем, что неравенство в (37)

$$-\frac{\sqrt{q^2-(2j\pi)^2}}{sh\sqrt{q^2-(2j\pi)^2}} < a < 0 \qquad (43)$$

сохраняется и не налагаются новые ограничения на a.

1) Пусть $\sin|\alpha|>0, \cos|\alpha|>0$, т.е. угол $|\alpha|$ в I четверти, тогда в (41) $a<0$, в (40) $u(\varphi)>0$ и не возникает новых ограничений на a.

2) Пусть $\sin|\alpha|>0, \cos|\alpha|<0$, т.е. угол $|\alpha|$ в II четверти;

а) если 1-е слагаемое в знаменателе a в (41) превалирует над 2-м слагаемым, то $a>0$ и точка $(a,q)\in H$, т.е. случай 2),а) не дает новых ограничений на a;

б) если 2-е слагаемое в знаменателе a в (41) превалирует над 1-м слагаемым, то $a<0$, в (40) $u(\varphi)>0$, и не возникает новых ограничений на a.

Отметим, что в случае $j=0$, $0<q<\pi$ имеет место неравенство

$$0<|\alpha| = q|\cos\varphi| < \pi,$$

реализуется либо случай 1), либо случай 2), и полученное неравенство для a в (37) $-q/shq<a<0$ сохраняется. Далее в пункте I считаем, что фиксированное $j\neq 0$.

3) Пусть $\sin|\alpha|<0, \cos|\alpha|<0$, т.е. угол $|\alpha|$ в III четверти, тогда в (41) $a>0$, точка $(a,q)\in H$ и нет новых ограничений на a.

4) Пусть $\sin|\alpha|<0, \cos|\alpha|>0$, т.е. угол $|\alpha|$ в IV четверти;

а) если 2-е слагаемое в знаменателе a в (41) превалирует над 1-м слагаемым, то $a>0$, $(a,q)\in H$ и нет новых ограничений на a;

б) если 1-е слагаемое в знаменателе a в (41) превалирует над 2-м слагаемым, то $a<0$, в (40) $u(\varphi)<0$. Покажем, что при этом a выполнено неравенство

$$a < -\frac{\sqrt{q^2-(2j\pi)^2}}{sh\sqrt{q^2-(2j\pi)^2}}. \qquad (44)$$

С учетом того, что при $a>0, b>0, c>0$ выполнено $\frac{a}{b-c}>\frac{a}{b}$, из (41) получаем

зникает новых ограни

$$|a| = \frac{\beta}{\cos|\alpha|\cdot sh\beta + \sin|\alpha|\cdot\frac{\sin\varphi\cdot ch\beta}{|\cos\varphi|}} >$$

$$> \frac{\beta}{\cos|\alpha|\cdot sh\beta} > \frac{\beta}{sh\beta} \geq \min_{\varphi}\frac{\beta}{sh\beta}. \qquad (45)$$

Так как угол $|\alpha|$ в IV четверти, то $|\alpha| = q|\cos\varphi|$ удовлетворит одному из неравенств, исходя из (42),

$$3\pi/2 < |\alpha| < 2\pi,\ 7\pi/2<|\alpha|<4\pi, \ldots,$$
$$((4j-1)\pi)/2 < |\alpha| < 2j\pi.$$

При этом $0<\cos|\alpha|<1$, а $1/\cos|\alpha|>1$, что учтено в (45). Так как

$$\alpha^2+\beta^2 = q^2\cos^2\varphi + q^2\sin^2\varphi = q^2,$$

то $\beta=\sqrt{q^2-\alpha^2}$. Функция $y=\beta/sh\beta$ убывающая на $(0,+\infty)$, функция $\beta=\sqrt{q^2-\alpha^2}$ при фиксированном q также убывающая по α, поэтому в (45) функцию

$$y=\beta/sh\beta = \sqrt{q^2-\alpha^2}\Big/sh\sqrt{q^2-\alpha^2}$$

следует найти в точке $|\alpha|=2j\pi$.

Отметим выполнимость неравенств, если $|\alpha|$ придавать значения $2\pi, 4\pi, \ldots, 2j\pi$, при которых $\cos|\alpha|=1$:

$$\frac{q}{shq} > \frac{\sqrt{q^2-(2\pi)^2}}{sh\sqrt{q^2-(2\pi)^2}} > \frac{\sqrt{q^2-(4\pi)^2}}{sh\sqrt{q^2-(4\pi)^2}} >$$

$$> \ldots > \frac{\sqrt{q^2-(2j\pi)^2}}{sh\sqrt{q^2-(2j\pi)^2}}.$$

Тогда в (45) при $\beta = \sqrt{q^2 - (2j\pi)^2}$ получим

$$|a| > \frac{\sqrt{q^2 - (2j\pi)^2}}{sh\sqrt{q^2 - (2j\pi)^2}}. \quad (46)$$

Из (46) с учетом того, что $a < 0$, получаем неравенство (44). В результате неравенство (43) сохраняется.

II. Пусть теперь

$$(2j+1)\pi < q < (2j+2)\pi. \quad (47)$$

Известно из (29), что область S находится в верхней полуплоскости $a > 0 (q > 0)$. Покажем, что неравенство

$$0 < a < \frac{\sqrt{q^2 - ((2j+1)\pi)^2}}{sh\sqrt{q^2 - ((2j+1)\pi)^2}} \quad (48)$$

сохраняется и не возникает новых ограничений на a.

Для a выполнено (41), для $u(\varphi)$ – (40).

1) Пусть $\sin|\alpha| > 0, \cos|\alpha| > 0$, т.е. угол $|\alpha|$ в I четверти, тогда в (41) $a < 0$, $(a,q) \in H$ и не возникает новых ограничений на a.

2) Пусть $\sin|\alpha| > 0, \cos|\alpha| < 0$, т.е. угол $|\alpha|$ во II четверти;

а) если 1-е слагаемое в знаменателе a в (41) превалирует над 2-м слагаемым, то $a > 0$, в (40) $u(\varphi) < 0$. Покажем, что

$$a > \frac{\sqrt{q^2 - ((2j+1)\pi)^2}}{sh\sqrt{q^2 - ((2j+1)\pi)^2}}. \quad (49)$$

В (41) имеем

$$a = \frac{\beta}{-\cos|\alpha| \cdot sh\beta - \sin|\alpha| \cdot \dfrac{\sin\varphi \cdot ch\beta}{|\cos\varphi|}} >$$

$$> \frac{\beta}{-\cos|\alpha| \cdot sh\beta} > \frac{\beta}{sh\beta} \geq \min_{\varphi} \frac{\beta}{sh\beta}. \quad (50)$$

Так как угол $|\alpha|$ во II четверти, то $|\alpha| = q|\cos\varphi|$ удовлетворяет одному из неравенств с учетом (47) $\pi/2 < |\alpha| < \pi$, $5\pi/2 < |\alpha| < 3\pi, \ldots,$

$$(4j+1)\pi/2 < |\alpha| < (2j+1)\pi = (4j+2)\pi/2.$$

При этом $0 < -\cos|\alpha| < 1$, а $1/(-\cos|\alpha|) > 1$, что учтено в (50). $\alpha^2 + \beta^2 = q^2$, $\beta = \sqrt{q^2 - \alpha^2}$.

При $|\alpha| = \pi, 3\pi, \ldots, (2j+1)\pi$ имеем

$$\frac{\sqrt{q^2 - \pi^2}}{sh\sqrt{q^2 - \pi^2}} > \frac{\sqrt{q^2 - (3\pi)^2}}{sh\sqrt{q^2 - (3\pi)^2}} >$$

$$> \ldots > \frac{\sqrt{q^2 - ((2j+1)\pi)^2}}{sh\sqrt{q^2 - ((2j+1)\pi)^2}}.$$

В (50) убывающую функцию $\beta/sh\beta$ следует найти в точке $\beta = \sqrt{q^2 - ((2j+1)\pi)^2}$.

Таким образом, получаем (49). В итоге неравенство (48) сохраняется.

б) Если 2-е слагаемое в знаменателе a в (41) превалирует над 1-м слагаемым, то $a < 0$, $(a,q) \in H$ и нет новых ограничений на a.

3) Пусть $\sin|\alpha| < 0, \cos|\alpha| < 0$, т. е. угол $|\alpha|$ в III четверти, тогда в (41) $a > 0$, в (40) $u(\varphi) > 0$ и нет новых ограничений на a.

4) Пусть $\sin|\alpha| < 0, \cos|\alpha| > 0$, т. е. угол $|\alpha|$ в IV четверти;

а) если 1-е слагаемое знаменателя a в (41) превалирует над 2-м слагаемым, то $a < 0$, $(a,q) \in H$ и нет новых ограничений на a;

б) если 2-е слагаемое в знаменателе a в (41) превалирует над 1-м слагаемым, то $a > 0$, в (40) $u(\varphi) > 0$ и нет новых ограничений на a.

Таким образом, неравенство (48) сохраняется.

Рассмотрение случаев I, II позволяет сделать вывод о том, что область S задается только неравенствами в (37) (см. рис. 2). ■

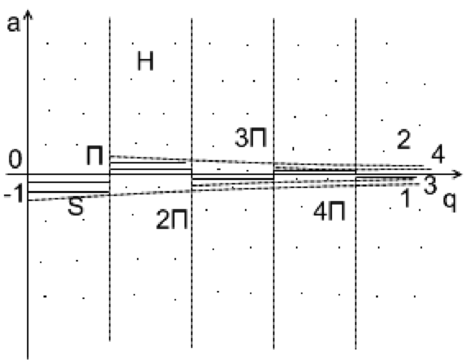

Рис. 2. *Случай* $\alpha_1\alpha_2 < 0$. *Область* S.
Линии: 1. $a = -q/shq$, $j = 2{,}3{,}4$
j. $a = (-1)^j \sqrt{q^2 - ((j-1)\pi)^2} \Big/ sh\sqrt{q^2 - ((j-1)\pi)^2}$

Список литературы

1. *Седова С.М.* О критерии устойчивости дифференциально-разностных уравнений // Вестн. Перм. ун-та. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2011. Вып.3(7). С.6–11.
2. *Рехлицкий З.И.* Об устойчивости решений дифференциально-разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Изв. АН СССР.1966. Т.30. Вып. 5. С.971–974.
3. *Малыгина В.В.* Об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений: дис. … канд. … наук. Пермь, 1983. 101 с.
4. *Седова С.М.* Устойчивость линейных дифференциально-разностных уравнений с периодическими коэффициентами: дис. …канд. … наук. Пермь, 2000. 130 с.
5. *Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В.* Устойчивость линейных систем с последействием. I // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 5. С.745–754.
6. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость уравнений с запаздывающим аргументом // Изв. вузов. Математика. 1997. № 6. С. 3–16.
7. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь, 2001. 230 с.
8. *Маркушевич А.И., Маркушевич Л.А.* Введение в теорию аналитических функций. М.: Просвещение, 1977. 320 с.

The stability of one differential-difference equation with one delay and the periodic piecewise constant coefficient

S. M. Sedova
Perm National Research Polytechnic University, Russia, 614990, Perm, Komsomolsky Av., 29
vm@pstu.ru; (342) 2-391-697

It is built the asymptotic stability domain and the instability domain for one linear differential-difference equation on the plane of the equation parameters.

Key words: *differential equation with delay; asymptotic stability domain; instability domain.*