ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2011 Математика. Механика. Информатика Вып. 4(8)

УДК 531.36 + 534.1

Динамические модели механических систем

Н. Н. Макеев
Институт проблем точной механики и управления РАН
Россия, 410028, Саратов, ул. Рабочая, 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

Рассматривается движение нелинейной системы осцилляторов в шестимерном евклидовом пространстве, находящейся в однородном потенциальном поле. Приводятся три формы уравнений движения системы и их частные решения, соответствующие некоторым простейшим движениям осцилляторов.

Ключевые слова: *механическая система; система осцилляторов; динамическая модель.*

Введение

Проблемы, связанные с задачами классической механики и теории нелинейных колебаний, имеют ряд общих качественных особенностей, обусловленных универсальным свойством структурной изоморфности их динамических моделей. Это свойство проявляется в том, что некоторые объекты или процессы, функционирование которых описывается детерминированными эволюционными динамическими системами с сосредоточенными параметрами, соответствуют одной и той же динамической модели. При этом объекты или процессы, соответствующие данной модели, могут иметь различную природу. Эта *общая динамическая модель* отражает качественно однотипные эволюционные процессы, обусловленные свойствами этих объектов.

Общей динамической моделью такого рода для определенного класса механических систем может являться нелинейная система взаимодействующих осцилляторов, находящаяся в консервативном силовом поле. В подтверждение этого можно привести такой характерный факт: решение некоторых задач динамики механических и физических объектов сводится к исследованию движения колебательных систем. В этом случае в данных задачах последние являются *динамическими аналогами* этих объектов.

В связи с этим приведем несколько примеров. Задача двух тел в небесной механике (задача Кеплера) путем регуляризации – преобразования Т. Леви – Чивита – сводится к модели одномерного гармонического осциллятора [1]. К этой же задаче относится и преобразование К. Болина, осуществляемое регуляризацией в общем эллиптическом случае (при отрицательных значениях постоянной интеграла энергии). Здесь орбиты задачи Кеплера переводятся в орбиты двумерного гармонического осциллятора на комплексной плоскости [2]. Более общие регуляризующие преобразования, приводящие динамические уравнения механики к форме уравнений движения линейных осцилляторов, известны как преобразования Кустаанхеймо – Штифеля [3] (см. [1, с.126]), а также как преобразования Ю.Мозера [1] и К.Сундмена [4].

Физические задачи, решение которых может быть сведено к осцилляторной модели, содержатся в книге [5].

Примечательна работа "Нелинейный осцилляторный аналог динамики твердого тела" [6], в которой построена гипотетическая модель движения абсолютно твердого тела вокруг неподвижного полюса в классическом случае Эйлера – Пуансо. Здесь движение тела интерпретировано как нелинейные колебания системы трех осцилляторов, каждый из которых определяет изменение проекции вектора мгновенной угловой скорости тела на его главную ось инерции. В этой работе показана прямая динамическая аналогия между движением твердого тела вокруг неподвижного полюса и одномерными колебаниями осцилляторов нелинейной системы.

В работе М. Виварелли [7] установлена динамическая аналогия между тремя задачами механики: задачей двух тел (задачей Кеплера), задачей о движении твердого тела вокруг неподвижного центра в случае Эйлера – Пуансо и задачей об изотропном гармоническом осцилляторе в пространстве $\mathbf{R}^4$.

Таким образом, здесь просматривается прямая связь между движением механических объектов определенного класса и движением гипотетической системы осцилляторов (или отдельного осциллятора).

В настоящей работе приводятся несколько форм уравнений движения нелинейной системы осцилляторов с квадратичной нелинейностью, находящейся в однородном потенциальном силовом поле. Каждая из этих форм может быть положена в основу динамической модели, аппроксимирующей движение механического объекта. При этом термин "осциллятор" здесь понимается в обобщенном смысле как точечный объект, совершающий малые (не обязательно колебательные) движения в некоторой окрестности положения устойчивого равновесия системы.

1. Предварительные положения

Рассмотрим систему осцилляторов с квадратичной нелинейностью, находящихся на стационарных двусторонних упругих удерживающих связях, движущуюся в однородном потенциальном силовом поле. Предполагается, что система имеет по крайней мере одно положение устойчивого равновесия (в смысле Лагранжа–Дирихле).

Сопоставим движение данной системы и движение фазовой точки в пространстве $\mathbf{R}^6$. Пусть $\mathbf{u} = [u_1 \ldots u_6]^T$ − безразмерный фазовый вектор-столбец, характеризующий малые отклонения (вариации) $u_j(\tau)$ системы от ее положения равновесия; τ − безразмерное (приведенное) время.

Движение системы осцилляторов в окрестности ее положения равновесия зададим *динамической системой* (ДС)

$$\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{F}(\mathbf{u}) \qquad (\tau \in T, \mathbf{u} \in \mathbf{R}^6). \tag{1}$$

Здесь $T = [0, +\infty)$, $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ $(i, j = 1, \ldots, 6)$ − невырожденная квазиантисимметрическая матрица над коммутативным полем с элементами

$$a_{24} = -a_{42} = a_{51} = n,$$

$$a_{62} = -a_{26} = -a_{53} = k, \tag{2}$$

$$a_{15} = -nb^{-1}, \quad a_{35} = ka^{-1},$$

$\mathbf{F} = [F_j]^T$ − вектор-столбец с компонентами

$$F_1 = m_1 u_2 u_3 \quad (1, 2, 3), \tag{3}$$

$$F_4 = u_3 u_5 - u_2 u_6 \quad (4, 5, 6),$$

где m_j $(j = 1, 2, 3)$ − заданные постоянные. Значения элементов a_{ij}, не представленных равенствами (2), равны нулю. Штрих сверху в ДС (1) и всюду далее обозначает дифференцирование по τ.

Выражения (3) отражают квадратичную нелинейность ДС (1). Соотношения для F_p $(p = 1, 2, 3)$ могут быть получены в результате представления квадратичной зависимости в форме матричной "Г − Ω пары" [2]

$$[\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Omega}] = \mathbf{\Gamma\Omega} - \mathbf{\Omega\Gamma}.$$

Здесь **Г, Ω** − кососимметрические матрицы с элементами u_p, Ω_p соответственно $(p = 1, 2, 3)$, где Ω_p − величины, пропорциональные фазовым координатам u_p.

Соотношения (3) для F_r $(r = 4, 5, 6)$ являются компонентами скобок Пуассона [1, 4] от функций $2\Phi\,(u_1, u_2, u_3) = \|\mathbf{u}^*\|^2$, $2\Psi\,(u_4, u_5, u_6) = \|\mathbf{u}_*\|^2$, где $\mathbf{u}^*(u_p)$, $\mathbf{u}_*(u_r)$ − соответствующие векторы; $\|\ldots\|$ − символ евклидовой нормы вектора. Вид соотношений (3), определяемый матричной **Г− Ω** парой и функциями Φ, Ψ, отражает характер квадратичной нелинейности величин F_j, инвариантный относительно размерности пространства $\mathbf{R}^n$.

Фазовое пространство с координатами u_p, u_r здесь рассматривается в смысле, определённом в [8], как конечномерное дифференцируемое многообразие. При этом, в частности, величины u_p могут являться обобщенными импульсами, а u_r − обобщенными координатами.

Динамическая система (1) является детерминированной автономной четырехпараметрической системой с заданными независимыми параметрами k, n, m_1, m_3, причём в общем случае $k^2 + n^2 \neq 0$. Здесь k, n − позиционные параметры, m_j $(j = 1, 2, 3)$ − параметры конфигурации системы. При этом положительные параметры a, b, содержащиеся в равенствах (2), определяются зависимостями

$$a = (1 - m_1)M^{-1}, \quad b = (1 + m_3)M^{-1}, \tag{4}$$

а параметр m_2, входящий в соответствующее выражение (3), связан с m_1, m_3 равенством

$$m_2 = -(m_1 + m_3)M^{-1}, \qquad (5)$$

где $m_1 \neq 1$, $m_3 \neq -1$, $M = 1 + m_1 m_3$.

Система уравнений (1) является расширенным (на пространство $\mathbf{R}^6$) *аналогом динамической системы Мэнли–Роу* для механической системы, моделируемой совокупностью взаимодействующих осцилляторов с квадратичной нелинейностью [9]. При этом соотношения (4), (5) можно интерпретировать следующим образом.

Пусть выполняется проективное преобразование евклидовой плоскости с инвариантом $I = det\,\mathbf{C}$, $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ $(i, j = 1, 2, 3)$, в котором декартовы координаты x, y точки N (прообраза) и координаты x^*, y^* точки N^* (образа) связаны соотношениями

$$x^* = \frac{(\mathbf{c}_1 \bullet \mathbf{r})}{(\mathbf{c}_3 \bullet \mathbf{r})}, \quad y^* = \frac{(\mathbf{c}_2 \bullet \mathbf{r})}{(\mathbf{c}_3 \bullet \mathbf{r})}. \qquad (6)$$

Здесь обозначено: $\mathbf{c}_i = (c_{i1}, c_{i2}, c_{i3})$ $(i = 1, 2, 3)$, $\mathbf{r} = (x, y, 1)$. Соответствующие равенства (4), (6) идентичны при значениях $(x, y) = (1, m_1)$, $(x^*, y^*) = (a, b)$,

$$c_{i1} = -c_{12} = 1 \ (i = 1, 2, 3), \quad c_{13} = c_{22} = c_{33} = 0,$$
$$c_{23} = c_{32} = m_3, \quad I = -m_3(1 + m_3) \neq 0$$

для точек евклидовой плоскости, не принадлежащих прямой $M = 0$.

Таким образом, соотношения (4) можно интерпретировать как проективное преобразование евклидовой плоскости $(x, y) \to (x^*, y^*)$, существующее при $I \neq 0$, $M \neq 0$. Величину m_2 в равенстве (5) можно представить как разность координат x^*, y^* образа, определяемых формулами (6).

Введем квазипотенциалы

$$W_1 = \tfrac{1}{2}(bu_1^2 + u_2^2 + au_3^2) - (ku_4 + nu_6),$$
$$W_2 = \tfrac{1}{2}[(k + u_4)^2 + u_5^2 + (n + u_6)^2]$$

и векторы

$$\mathbf{f}_1 = \left\langle \frac{\partial W_1}{\partial u_p} \right\rangle^T \quad (p = 1, 2, 3),$$

$$\mathbf{f}_2 = \left\langle \frac{\partial W_2}{\partial u_r} \right\rangle^T \quad (p = 4, 5, 6),$$

где $< \ldots >$ – символ полной совокупности координат вектора по индексам p, r сответственно.

Система уравнений (1) обладает независимыми алгебраическими инвариантами, представляемыми в виде

$$W_1 = h_1, \qquad (\mathbf{f}_1 \bullet \mathbf{f}_2) = h_2, \qquad (7)$$

где h_1, h_2 – постоянные интегрирования.

В силу инварианта W_1 (7) и уравнений (1)–(3) для системы осцилляторов в положении равновесия $(0, 0, 0; u^0{}_4, 0, u^0{}_6)$, где

$$nu_4^0 - ku_6^0 = 0,$$
$$(u_4^0, u_6^0) = (k, n)m^{-2}h_1, \quad \|\mathbf{u}^0\| = m^{-1}|h_1|.$$

Здесь нулевой верхний индекс относится к значениям величин в положении равновесия системы; m – величина, определяемая равенством (8).

2. Некоторые формы уравнений движения системы осцилляторов

2.1. Диагональная форма

Характеристическое уравнение ДС (1) имеет вид

$$\lambda^2(\lambda^2 + m^2)(\lambda^2 + \sigma^2) = 0,$$

в силу чего спектр собственных значений матрицы $\mathbf{A}$ есть $(0, 0, -im, im, -i\sigma, i\sigma)$, где $i^2 = -1$,

$$m = +\sqrt{k^2 + n^2}, \ \sigma = +\sqrt{a^{-1}k^2 + b^{-1}n^2}. \qquad (8)$$

Здесь нулевому собственному значению соответствуют простые элементарные делители. Наличие в спектре нулевых собственных значений обусловлено тем, что потенциальная энергия системы осцилляторов не является положительно определенной функцией.

Введем матрицу $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ $(i, j = 1, \ldots, 6)$, образованную соответственными собственными векторами матрицы $\mathbf{A}$, а также матрицу $\mathbf{B}^{-1}[\beta_{ij}]$ $(i, j = 1, \ldots, 6)$. В случае, при котором выполняется условие нормирования $m = 1$, элементы этих матриц определяются равенствами

$$\left.\begin{aligned} &b_{12} = b_{41} = k, \quad b_{23} = b_{24} = b_{55} = b_{56} = 1, \\ &b_{32} = b_{61} = n, \quad b_{44} = -b_{43} = in, \\ &b_{63} = -b_{64} = ik, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

$$b_{16} = -b_{15} = in(b\sigma)^{-1}, \quad b_{35} = -b_{36} = ik(a\sigma)^{-1},$$

$$\beta_{14} = k, \qquad \beta_{16} = n, \qquad \beta_{21} = k(a\sigma^2)^{-1}, \ (10)$$

$$\beta_{32} = \beta_{42} = \beta_{55} = \beta_{65} = \tfrac{1}{2}, \quad \beta_{34} = -\beta_{44} = \tfrac{1}{2}in,$$
$$\beta_{46} = -\beta_{36} = \tfrac{1}{2}ik, \quad \beta_{51} = -\beta_{61} = \tfrac{1}{2}in\sigma^{-1},$$
$$\beta_{23} = n(b\sigma^2)^{-1}, \qquad \beta_{63} = -\beta_{53} = \tfrac{1}{2}ik\sigma^{-1}.$$

Значения элементов, не содержащиеся в равенствах (9), (10), равны нулю.

Пусть $\mathbf{x} = [x_1 \ \dots \ x_6]^T$ − вектор диагональных переменных x_j. Производя диагонализацию ДС (1) путем преобразования $\mathbf{u} = \mathbf{Bx}$ [10], в результате получим

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Dx} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (\tau \in T, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{C}^6), \tag{11}$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{AB}$ – диагональная матрица, элементы которой – спектр собственных значений матрицы $\mathbf{A}$ системы (1), а вектор-столбец $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{Bx})$. Здесь применено свойство подобия матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{D}$, согласно которому они имеют одинаковые спектры [11].

Введем параметры

$$\begin{aligned} &P_1 = \sigma^2 - m^2, \qquad P_2 = Q_2\sigma^{-1} - \sigma, \\ &Q_1 = \frac{k^2}{a} - \frac{n^2}{b}, \quad Q_2 = \frac{b}{a}k^2 + \frac{a}{b}n^2 \end{aligned} \tag{12}$$

и вспомогательные переменные

$$\begin{aligned} &(X_1, \ X_2) = (x_4 - x_3, \ x_4 + x_3), \\ &(X_3, \ X_4) = (x_5 - x_6, \ x_5 + x_6). \end{aligned} \tag{13}$$

Система уравнений (11) в диагональных переменных имеет вид

$$\begin{aligned} &x_1' = iX_1X_2 + i\sigma X_3X_4, \\ &x_2' = n_{21}x_2X_2 + n_{22}X_2X_3, \\ &x_4' = imx_4 + n_{41}x_2^2 + n_{42}x_5^2 + n_{43}x_6^2 + n_{44}X_2 - \\ &\quad - n_{45}x_2x_5 - n_{46}x_2x_6 + n_{21}x_5x_6, \\ &x_6' = i\sigma x_6 - \frac{1}{2}i\sigma x_1X_3 + n_{61}x_2x_3 + n_{62}x_2x_4 - \\ &\quad - n_{42}x_3X_3 - n_{43}x_4X_3. \end{aligned} \tag{14}$$

В системе (14) не представлены уравнения, содержащие величины x_3', x_5', поскольку $x_3 = \bar{x}_4$, $x_5 = \bar{x}_6$ и эти уравнения восстанавливаются по данным уравнениям этой системы. Здесь черта сверху − символ комплексного сопряжения.

В уравнениях (14) обозначено:

$$\begin{aligned} &n_{21} = -2cl, \quad n_{22} = 2ic\sigma^{-1}P_1, \ n_{41} = \tfrac{1}{2}l, \\ &n_{42} = (1-\sigma)cl, \ n_{43} = (1+\sigma)cl, \ n_{44} = \tfrac{1}{2}i, \\ &n_{45} = (1-g_1)n_{44}, \ n_{46} = (1+g_1)n_{44}, \\ &n_{61} = (1+P_2)n_{44}, \ n_{62} = [\Lambda(\sigma) + P_2]n_{44}, \\ &\Lambda(\sigma) = \sigma - \sigma^{-1} - 1, \quad c = (2ab\sigma^2)^{-1}, \\ &l = knm_2, \ g_1 = m_2\sigma^{-1}Q_1, \ g_2 = -n_{21}\sigma. \end{aligned} \tag{15}$$

Динамическая система (14) с учетом присоединенных к ней уравнений, содержащих x_3', x_5', обладает независимыми алгебраическими инвариантами

$$\begin{aligned} &2x_1 - c_0x_2^2 - X_2^2 + X_3^2 = h, \\ &[c_0(1+x_1) - ilX_1]x_2 + X_2X_4 + \sigma^{-1}X_1X_3 = H. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь $c_0 = (2c)^{-1} > 0$; h, H − постоянные интегрирования; величины m, σ определяются равенствами (8).

Наличие инвариантов (16) позволяет рассматривать движение фазовой точки данной ДС не на всем многообразии пространства $\mathbf{R}^6$, а на некотором его подмногообразии меньшей размерности.

2.2. Специальная (факторизованная) форма

Приведем ДС (1) к форме, при которой матрица аддитивной линейной части преобразованной системы имеет антисимметричную квазидиагональную структуру вида {2, 2, 2} [12, с. 103]. Такое преобразование ДС назовем *факторизацией системы* (в специальном смысле). Эта факторизация достигается линейным преобразованием $\mathbf{u} = \mathbf{Gy}$, примененным А.М.Ляпуновым [13]. Здесь $\mathbf{G} = \mathbf{BZ}$ − матрица результирующего преобразования, где матрица $\mathbf{Z}$ образуется согласно [13]. В результате ДС (1) принимает вид

$$\mathbf{y}' = \mathbf{Ny} + \mathbf{g}(\mathbf{y}) \quad (\tau \in T, \mathbf{y} \in \mathbf{C}^6), \tag{17}$$

где $\mathbf{N} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{AG}$, $\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{Gy})$.

Элементы матриц $\mathbf{G} = [g_{ij}]$, $\mathbf{G}^{-1} = [\alpha_{ij}]$ $(i, j) = (1, \dots, 6)$ при $m = 1$ имеют вид

$$\begin{aligned} &g_{12} = g_{41} = g_{64} = k, \quad g_{23} = g_{55} = 1, \\ &g_{32} = g_{61} = -g_{44} = n, \quad g_{16} = -\frac{n}{b\sigma}, \ g_{36} = \frac{k}{a\sigma}, \\ &\alpha_{14} = \alpha_{46} = k, \quad \alpha_{16} = -\alpha_{44} = n, \quad \alpha_{2s} = \beta_{2s}, \\ &\alpha_{32} = \alpha_{55} = 1, \quad \alpha_{61} = -n\sigma^{-1}, \quad \alpha_{63} = k\sigma^{-1}, \end{aligned} \tag{18}$$

где s = 1, 3; величины β_{21}, β_{23} определяются равенствами (10). Значения элементов, не содержащиеся в равенствах (18), равны нулю.

Система уравнений (17) в компонентах y_j (j = 1, … , 6) вектора $\mathbf{y} = [y_1 \dots y_6]^T$ с учетом подобия матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{N}$ принимает вид

$$\begin{aligned} &y_1' = -y_3y_4 + \sigma y_5y_6, \\ &y_2' = n_{21}y_2y_3 - in_{22}y_3y_6, \\ &y_3' = -imy_4 + ly_2^2 + n_{21}y_6^2 + g_1y_2y_6, \\ &y_4' = imy_3 - y_1y_3 - y_2y_5 + g_2y_5y_6, \\ &y_5' = -i\sigma y_6 - \sigma y_1y_6 + y_2y_4 - g_2y_4y_6, \\ &y_6' = i\sigma y_5 + P_2y_2y_3 - n_{21}y_3y_6. \end{aligned} \tag{19}$$

В уравнениях (19) коэффициенты определяются равенствами (8), (12), (15). Эта система уравнений удовлетворяет условиям теоремы Зигеля–Мозера о нормализации [1, 14].

Система (19) обладает независимыми алгебраическими инвариантами

$$-2y_1 + c_0 y_2^2 + y_3^2 + y_6^2 = h_3,$$
$$c_0(1+y_1)y_2 + (ly_2 + \sigma^{-1}y_6)y_4 + y_3 y_5 = h_4,$$

являющимися аналогами равенств (7), (16).

Пусть **K** − диагональная матрица, элементами которой являются упорядоченный набор квадратов собственных значений матрицы **A**. Линеаризуя ДС (19) в окрестности ее точки покоя, в силу малости величин отклонений $|y_j|$ получаем

$$\mathbf{y}'' + \mathbf{K}\mathbf{y} = 0. \qquad (20)$$

Нормализованная система (20) представима в виде уравнений движения материальной точки единичной массы в конфигурационном **y**-пространстве $\mathbf{R}^6$, происходящего в консервативном силовом поле с потенциалом

$$U(\mathbf{y}) = \tfrac{1}{2}\left[m^2\left(y_3^2 + y_4^2\right) + \sigma^2\left(y_5^2 + y_6^2\right)\right] \qquad (21)$$

и интегралом энергии

$$\tfrac{1}{2}\left[(y_3')^2 + \ldots + (y_6')^2\right] - U(\mathbf{y}) = h_*. \qquad (22)$$

Согласно выражениям (21), (22) ДС (20) относится к *системам Лиувилля* [4], представленным в нормализованной форме.

Сопоставим движению изображающей точки фазового пространства движение материальной точки единичной массы в конфигурационном **y**-пространстве, подчиняющееся динамической системе с интегралом (22). Введём **y**-*гиперплоскость* (ГП) переменных y_j (j = 1, … , 6) и функцию $V(\mathbf{y}) = U(\mathbf{y}) + h_*$ в силу равенства (22). Ветви траектории $V(\mathbf{y}) = 0$ в этой ГП разделяют область существования траекторий системы с интегралом (22) на подобласти, в каждой из которых величина $V(\mathbf{y})$ знакоопределенна. Тогда траектории данной системы содержатся целиком в ограниченной области ГП, для которой $V(\mathbf{y}) > 0$. Следовательно, если точка в некоторый фиксированный момент времени $\tau = \tau_*$ находится в ограниченной области ГП, охваченной замкнутой ветвью траектории $V(\mathbf{y}) = 0$, то эта точка для любых значений $\tau \in (\tau_*, +\infty)$ также будет находиться в данной области. Такое движение точки является *устойчивым по Г. Гиллю – К. Болину – Г. Дарвину* (термин ограниченной задачи трех тел [4]).

3. Простейшие движения системы осцилляторов

Рассмотрим примеры интегрирования представленных ДС, относящиеся к некоторым простейшим движениям осцилляторов. Такими движениями, в частности, являются либрационное и лимитационное движения (термины [15, 16]).

3.1. Либрационное движение

Пусть r, s ($r^2 + s^2 = 1$), p, ω, Ω − заданные параметры движения ДС (1), значения которых (кроме, возможно, s) отличны от нуля. При этом $-1 < s < 1$, $g = n + s \neq 0$ и $m_1 \neq 1$, $m_3 \neq -1$. Положим, что $k = m_3 = 0$, в силу чего $a = 1 - m_1$, $b = 1$, $m_1 + m_2 = 0$. Для векторов $\mathbf{u}^*(u_p)$ (p = 1, 2, 3), $\mathbf{u}_*(u_r)$ (r = 4, 5, 6) примем условия инвариантности их норм

$$\left\|\mathbf{u}^*\right\|^2 = D_1^2, \quad \left\|\mathbf{u}_*\right\|^2 = D_2^2 \qquad (t \in T), \qquad (23)$$

где $(D_1, D_2) = const.$

Из многообразия состояний ДС (1) выделим движение, удовлетворяющее условиям (23), в силу чего можно принять

$$(u_1, u_2) = \Omega r\,(\sin\theta, \cos\theta), \quad u_3 = p,$$
$$(u_4, u_5) = r(\sin\theta, \cos\theta), \quad u_6 = s, \qquad (24)$$
$$\theta = \omega\tau.$$

Согласно уравнениям ДС (1) в силу выражений (24) и принятых условий имеют место определяющие соотношения

$$(\omega - m_1 p)\Omega + n = 0,$$
$$g\,\Omega + \omega - p = 0. \qquad (25)$$

Из системы уравнений (25) получаем условия

$$g\,\Omega^2 - (1 - m_1)p\Omega - n = 0, \qquad (26)$$

$$\omega = p - g\,\Omega, \qquad (27)$$

которым удовлетворяют значения параметров состояния системы.

Соотношения (24) определяют стационарное (по параметрам Ω, ω, p и одному из параметров r, s) движение, удовлетворяющее условиям инвариантности (23). Если при этом постоянные компоненты u_3, u_6 взаимосвязаны соотношением

$$u_3 = \Omega u_6 + \omega,$$

то данное движение является аналогом регулярной прецессии, причем тогда

$$D_1^2 = (\Omega r)^2 + p^2, \quad D_2^2 = 1.$$

Если выполняется дискриминантное условие

$$D = (1 - m_1)^2 p^2 + 4ng > 0,$$

то имеют место два режима стационарного движения, соответствующие двум различным действительным корням Ω_1, Ω_2 уравнения (26) и, соответственно, двум значениям параметра ω, определяемым равенством (27). При $D = 0$ имеет место лишь один режим движения, для которого

$$\Omega = \tfrac{1}{2} g^{-1}(1 - m_1)p, \quad \omega = \tfrac{1}{2}(1 + m_1)p,$$

а при $D < 0$ данное движение не существует.

3.2. Лимитационные движения

К этим движениям отнесем такие, для которых при $\tau \to +\infty$ вектор $\mathbf{y}$ достигает определенного конечного предела.

3.2.1. Движение первого рода

Для параметров факторизованной ДС (19) введем ограничения

$$k = m_3 = 0, \quad n > 0, \tag{28}$$

в силу чего имеем

$$\sigma = m = n, \quad n_{2i} = n_{4j} = 0 \ \ (i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3).$$

К условиям (28) присоединим следующие:

$$|\, y_1(\tau)| << n \qquad (\tau \in T), \quad y_2^0 = 0. \tag{29}$$

В силу первого условия (29) в ДС (19) пренебрегаем аддитивными членами, содержащими величину y_1. При этом предполагается, что вновь образованная ДС обладает свойством динамической определенности и обе системы уравнений динамически эквивалентны в смысле [17].

В результате интегрирования данной ДС имеем

$$\begin{gathered} y_1(\tau) = y_1^0 + \frac{i\alpha}{2n}\left[1 - \exp(-2n\tau)\right], \\ y_p(\tau) = y_p^0 \exp(-n\tau), \\ y_{p+1}(\tau) = -iy_p(\tau) \qquad (p = 3, 5), \\ \alpha = \left(y_3^0\right)^2 - n\left(y_5^0\right)^2, \qquad \mathbf{y}^0 = \mathbf{y}(0). \end{gathered} \tag{30}$$

Решение (30) соответствует лимитационному движению системы с предельным при $\tau \to +\infty$ вектором состояния $\mathbf{y}$ (y_1^*, 0, … , 0), где $y_1^* = y_1^0 + i\alpha(2n)^{-1}$. Это означает, что все отклонения y_3, … , y_6 экспоненциально асимптотически при $\tau \to +\infty$ затухают, а вариация y_1 асимптотически приближается к предельному значению y_1^*.

3.2.2. Движение второго рода

Рассмотрим предельный (вырожденный) случай ДС (1), при котором

$$k = n = 0. \tag{31}$$

Интегральное многообразие системы (1) при условиях (31) (*предельной системы*) является особым многообразием, не содержащимся в множестве ее решений для общего случая.

Следуя А.М. Ляпунову [13], ищем частное решение предельной системы в виде

$$\begin{aligned} u_p &= a_p \tau^{-1} \quad (p = 1, 2, 3), \\ u_r &= a_r \tau^{-2} \quad (r = 4, 5, 6), \end{aligned} \tag{32}$$

где a_p, a_r – постоянные, подлежащие определению, такие, что $\left\| \mathbf{a}^*(a_p) \right\|^2 \neq 0$ и $a_r = 0$ для одного фиксированного значения из r = 4,5, 6.

В силу выражений (32) из данной системы следуют определяющие уравнения

$$\begin{aligned} &a_1 + m_1 a_2 a_3 = 0 \qquad (1, 2, 3), \\ &2a_4 + a_3 a_5 - a_2 a_6 = 0 \qquad (4, 5, 6). \end{aligned} \tag{33}$$

Система уравнений (33) имеет два решения; первое из них есть

$$\begin{aligned} &a_1 = -(m_2 m_3)^{-1/2} \qquad (1, 2, 3), \\ &a_r = 0 \qquad (r = 4, 5, 6). \end{aligned} \tag{34}$$

Рассмотрим знаки ненулевых величин m_p, m_r, m_s, где (p, r, s) = 1, 2, 3 и все p, r, s – различные. Если в равенствах (34) $m_p > 0$, то следует принять (m_r, m_s) > 0; в случае, при котором $m_p < 0$, следует выбрать (m_r, m_s) < 0.

Второе решение системы уравнений (33) имеет вид

$$a_s = 0 \ (s = 1, 3, 5), \quad a_2 = 2i, \quad a_4 = ia_6 \neq 0, \tag{35}$$

где a_4, a_6 – формально произвольные постоянные.

Соотношения (32), (34), (35), определяющие решение предельной ДС (1) при ограничениях (31), можно рассматривать как главные части некоторых асимптотических при $\tau \to +\infty$ разложений лимитационных решений данной системы. Остальные аддитивные элементы этих разложений имеют более высокие порядки малости по сравнению с их главными частями.

Таким образом, предельное при $\tau \to +\infty$ состояние данной ДС соответствует ее *асимптотическому равновесию* [18] в начале координат.

4. Режим резонанса

Для линейной подсистемы, входящей в ДС (1), может иметь место режим *внутреннего резонанса* (термин задач небесной механики). Поскольку параметр σ, устанавливаемый равенством (8), определяет отношение частот в линейной подсистеме, то, полагая $\sigma = 1$, получаем

$$\frac{k^2}{1-m_1} + \frac{n^2}{1+m_3} = \frac{1}{M}, \tag{36}$$

где $m_1 \neq 1$, $m_3 \neq -1$.

Соотношение (36) выражает условие существования простого внутреннего резонанса типа 1:1 (условие "захвата в резонанс" [1]). Этому соотношению на евклидовой плоскости параметров a, b, определяемых равенствами (4), отвечает гипербола с уравнением

$$ab - an^2 - bk^2 = 0, \tag{37}$$

не распадающаяся при $kn \neq 0$.

В полупространстве $\{a, b, k^2\}$ равенству (36) соответствует гиперболический цилиндр с направляющей, определяемой уравнением (37). Это уравнение устанавливает k^2-параметрическое множество резонансных поверхностей линейной подсистемы ДС (1) ($k^2 < +\infty$).

Другие множества резонансных поверхностей данной системы имеют место при резонансах высших порядков, для которых $\sigma = 2, 3, \ldots$

Заключение

В монографиях [19−21] в качестве примера рассмотрена простейшая динамическая модель, описывающая состояние линейной трехатомной молекулы с симметричной равновесной конфигурацией. Эта линейная модель представлена системой трех взаимодействующих осцилляторов, находящихся на линейных упругих склерономных удерживающих связях в предположении, что взаимодействия между осцилляторами аддитивны (в силу линейности связей). На основе этой модели описаны простейшие движения объекта в евклидовом конфигурационном пространстве.

Для описания движения объектов более сложной структуры и многообразия их возможных состояний необходима более совершенная модель, адекватно отражающая свойства этих объектов относительно заданной совокупности их характеристик. Этим объясняется, в частности, попытка применения моделей, основанных на ДС (1), (14), (19). Относительно этих систем необходимо заметить следующее.

Ввиду малости величин вариаций в данных системах входящие в них аддитивные нелинейные члены при определенных условиях можно рассматривать как некоторые малые возмущения линейных осцилляторов в окрестности положения их устойчивого равновесия. Эти колебательные возмущения генерируются линейными подсистемами, аддитивно входящими в нелинейные динамические системы. Такого рода подход позволяет свести задачу о нахождении интегрального многообразия данных ДС к классической *задаче о возмущенных линейных колебаниях* [1] и воспользоваться известными методами ее решения. Эти методы разработаны в трудах Б.Ван дер Поля, Н.М.Крылова, Н.Н.Боголюбова, Ю.А.Митропольского, В.В.Волосова, В.П. Маслова, Ю.К.Мозера и Г.Е.Джакальи.

Список литературы

1. *Джакалья Г.Е.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 319 с.
2. *Арнольд В.И. и др.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники / Соврем. проблемы матем.: Фундам. направл. Т.3. М.: ВИНИТИ. 1985. 304 с.
3. *Штифель Е., Шейфеле Г.* Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 303 с.
4. *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 500 с.
5. *Pain H.J.* The physics of vibrations and waves. L.; N.Y.; Sydney; Toronto: John Wiley and sons. Ltd, 2006. 576 p.
6. *Junkins J.L., Jacobson I.D., Blanton J.N.* A nonlinear oscillator analog of rigid body dynamics // Celestial Mechanics. 1973. Vol.7, №4. P.398−407.
7. *Vivarelli M.D.* On the connection among three classical mechanical problems via the hypercomplex KS-transformation // Celestial Mechanics and Dynamic Astronomy. 1991. Vol.50, № 2. P.109−124.
8. *Арнольд В.И.*Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971. 239 с.

9. *Додд Р. и др.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.
10. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 367 с.
11. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
12. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. В 4 т. М.: Наука, 1967. Т.3, ч. 1. 323 с.
13. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. Харьков: Изд-во Харьк. матем. о-ва, 1892. 250 с. Переизд.: М.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
14. *Зигель К.Л.* Лекции по небесной механике. М.: ИЛ, 1959. 301 с.
15. *Парс Л.А.* Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 635 с.
16. *Шарлье К.* Небесная механика. М.: Наука, 1966. 628 с.
17. *Markus L.* Jets and geneticity in qualitative dynamics // New Approach. Nonlinear Probl. Dyn. Proc. Conf. Asilomar Conf. Grounds. Pacific Grove. Calif., 1979. Philadelphia, 1980. P.418–430.
18. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964. 477 с.
19. *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Гостехиздат, 1957. 408 с.
20. *Хаар Д.* Основы гамильтоновой механики. М.: Наука, 1974. 223 с.
21. *Лич Дж. У.* Классическая механика. М.: ИЛ, 1961. 173 с.

Dynamic models of mechanical systems

N. N. Makeyev
Problems of Precision Mechanics and Control Institute Russian Academy of Sciences
Russia, 410028, Saratov, Rabochaya st., 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

It is description a nonlinear system of oscillators in six-dimensional Euclidean space, which be situated in homogeneous potential field. Given three forms of equations motion a system and theirs particular solutions for some simple motions of oscillators.

Key words: *mechanical system; oscillator; dynamic model.*